Введение

В основе настоящей книги лежит специальный курс по выбору кафедры, прочитанный автором на механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова в 2022–2023 учебных годах. Пособие знакомит читателя с основными понятиями исчисления, созданного французским математиком Полем Маллявэном и носящего ныне его имя. Когда я работал во Франции в 2000–2010 годах в качестве приглашённого профессора, мне посчастливилось общаться с Полем Маллявэном. Настоящий мини-курс я рассматриваю как скромную дань памяти этому выдающемуся математику. В этом семестровом курсе мы рассматриваем базовые понятия. Например, вероятностное доказательство теоремы Хермандера, данное Маллявэном, здесь не приводится, однако добавлены не читавшиеся в курсе элементы конечномерного исчисления Маллявэна, относящиеся к регулярности вероятностных законов, в частности рассмотрен критерий существования плотности нелинейных функционалов.

Материал представлен в виде тринадцати лекций. Нумерация формул в каждой лекции начинается заново, однако это не должно привести к путанице, так как при ссылках на формулу вместе с номером формулы указывается и номер лекции, из которой она взята. Конец доказательства обозначается знаком □.

В конце книги для каждой из основных тем: «Повторные интегралы», «Разложение по винеровским хаосам», «Производные Маллявэна», «Интеграл Скорохода», «Формула Кларка — Окона», «Алгебра кратных интегралов Ито» дан набор задач. Отдельно приведены решения этих задач.

Несколько слов о том, где применяется теория, которая будет изложена в лекциях.

Исчисление Маллявэна (ИМ) иногда кратко определяют как метод исследования гладкости нелинейных функционалов на бесконечномерных пространствах с заданной на них гауссовой мерой. Часто это пространство непрерывных функций на заданном отрезке с мерой Винера на нём. Важное применение ИМ имеет в теории диффузионных марковских процессов. Известно, что точные решения стохастических дифференциальных уравнений можно найти в редких случаях. Это скорее исключение, а не правило. Поэтому большое значение имеет получение дискретных аппроксимаций таких уравнений и исследование точности таких аппроксимаций. Наиболее простой и часто используемой схемой аппроксимации является схема Эйлера — стохастический вариант ломаных Эйлера решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Методы ИМ позволяют исследовать точность схемы Эйлера при весьма общих предположениях на матрицу диффузии. Другое применение ИМ — это исследование скорости сходимости распределений последовательности $\{F_n\}$ случайных величин к предельной случайной величине F_∞. Здесь центральную роль играет разложение по винеровским хаосам. Методы ИМ позволяют получать скорость сходимости расстояния по вариации между F_n и F_∞, что сильнее, чем сходимость по распределению (называемая также слабой сходимостью). Наконец, упомянем приложения ИМ в финансовой математике. Применение обобщённой формулы Кларка — Окона для самофинансируемого портфолио (портфеля ценных бумаг), состоящего из рискового и безрискового активов, позволяет явно выписать решение, приводящее к заданной стоимости портфолио в заданный финальный момент времени.

Для дальнейшего изучения можно рекомендовать фундаментальную монографию В. И. Богачёва «Гауссовские меры» (М.: Наука; Физматгиз, 1997). В ней представлены как вероятностные, так и функционально-аналитические аспекты теории гауссовских мер.

Следует также сказать, что существуют альтернативные подходы к исследованию гладкости функционалов, заданных на бесконечномерных пространствах с мерой. Упомянем некоторые из них. Метод квазипроизводных процессов был предложен Н. В. Крыловым и был успешно применён для доказательства внутренней гладкости вероятностных решений в области: *Крылов Н. В.* «О первых квазипроизводных решений стохастических уравнений Ито» (Известия РАН, Сер. Матем., 1992, т. 56, вып. 2, с. 398–426). Метод стратификации предложен Ю. А. Давыдовым, М. А. Лифшицем и Н. В. Смородиной. Познакомиться с этим методом можно по книге: *Давыдов Ю. А., Лифшиц М. А., Смородина Н. В.* «Локальные свойства распределений стохастических функционалов» (М.: Наука; Физматгиз, 1995). Подходы основаны на совершенно других идеях и вместе с изложенной теорией пополняют арсенал методов исследования.