Предисловие

Пределы моего языка суть
пределы моего мира.

Людвиг Витгенштейн

Старое доброе дифференциальное исчисление является на самом деле частным случаем гораздо более общей конструкции, которую можно назвать *дифференциальным исчислением над коммутативными алгебрами* или просто дифференциальным исчислением. Оказывается, что оно во всём своём объёме есть просто следствие арифметических операций. Этот факт, замечательный сам по себе, имеет весьма важные приложения, простирающиеся от деликатных вопросов алгебраической геометрии до теории элементарных частиц. Основная цель этой книги и состоит в том, чтобы дать подробное объяснение, почему дифференциальное исчисление является аспектом коммутативной алгебры.

Обнаружить это можно, посмотрев на элементарную теорию многообразий глазами естествоиспытателя. Поэтому эта книга заодно служит и введением в теорию гладких многообразий, где слова «теория гладких многообразий» мы понимаем в широком смысле, включающем в себя и дифференциальное исчисление. Гладким многообразиям посвящено столько разных и хороших книг, что появление ещё одной требует пояснения.

При стандартном подходе действие разворачивается следующим образом. Сначала тем или иным способом определяется гладкое многообразие, скажем M, а затем уже строится алгебра $\mathcal{F}_M$ гладких функций на нём. В этой же книге последовательность действий обращается: мы начинаем с некоторой коммутативной $\mathbb{R}$-алгебры[1] $\mathcal{F}$, а затем определяем многообразие $M = M_{\mathcal{F}}$ как $\mathbb{R}$-спектр этой алгебры. (Естественно, для того чтобы $M_{\mathcal{F}}$ действительно могло называться гладким многообразием, нужно, чтобы алгебра $\mathcal{F}$ удовлетворяла определённым условиям; эти условия приводятся в главе 3, где подробно обсуждаются упомянутые здесь основные определения.)

---

[1] Здесь и далее $\mathbb{R}$ обозначает поле действительных чисел. Впрочем, и это очень важно, ничто не мешает заменить его на любое другое поле (или кольцо), если того требуют условия соответствующей задачи.

Такой подход сегодня нельзя назвать новым, он, скажем, широко используется в алгебраической геометрии. Одно из его преимуществ состоит в том, что он с самого начала не связан с выбором определённой системы координат, поэтому отпадает присущая аналитическому подходу необходимость постоянно доказывать, что то или иное определение или свойство, полученное в некоторой системе координат, на самом деле от выбора координат не зависит. Это объясняет популярность бескоординатной точки зрения среди математиков со склонностью к утончённой алгебре, но его уровень абстракции обескураживает более прагматичных прикладных математиков и физиков.

Действительно новой является мотивировка алгебраического подхода к понятию гладкого многообразия, вокруг которого разворачивается весь сюжет книги. Она исходит из пришедшего из естественных наук, точнее из физики, понятия *наблюдаемой*, которое и создаёт интуитивно прозрачное обоснование для всех основных определений и конструкций. При этом понятия *состояния* физической системы и *измерительного прибора* придают весьма абстрактным алгебраическим понятиям *точки спектра* и *элемента алгебры* $\mathcal{F}_M$ ощутимый физический смысл.

Один из основных принципов современной физики утверждает:

существует только то, что наблюдаемо.

Как известно, строящий научные теории *homo sapiens* получает необходимую для этого информацию из наблюдения и опыта. Вначале эту информацию ему поставляли собственные органы чувств, на смену которым затем пришли точные приборы. Подходящий ансамбль таких приборов составляет лабораторию. Сами лаборатории могут быть самыми разными, но в дальнейшем нас будут интересовать только *классические* физические лаборатории и термин *лаборатория* будет употребляться исключительно в этом смысле. Поэтому, чтобы найти подходящую математическую формализацию того, как получается и обрабатывается информация в классической физике, следует формализовать само понятие лаборатории. Разумеется, здесь речь идёт только о том, как получается информация об исследуемой физической системе, но не о том, как устроены составляющие лабораторию приборы и на каких физических принципах они действуют.

Итак, о состоянии исследуемой физической системы мы судим на основании показаний находящихся в лаборатории приборов. Шкалы этих приборов являются какими-то отрезками числовой оси, а их показания — вещественными числами. Получаемые показания затем обрабатываются, и в процессе обработки прежде всего используются четыре арифметические операции. В связи с этим полезно обратить внимание на то, что простейшие законы физики выражаются именно при помощи этих операций.

Далее заметим, что вместо того, чтобы складывать вручную показания приборов Π_1 и Π_2, можно построить или вообразить себе прибор, показания которого всякий раз дают сумму показаний этих приборов. Обозначим его $\Pi_1 + \Pi_2$. Аналогичным образом можно говорить о произведении $\Pi_1 \cdot \Pi_2$ приборов Π_1 и Π_2. Поскольку выбор единицы измерения той или иной величины субъективен, из соображений объективности наряду с установленным в лаборатории прибором Π, измеряющим эту величину, необходимо ввести в рассмотрение и виртуальные приборы $\lambda\Pi$, $\lambda \in \mathbb{R}$. А для того, чтобы иметь возможность произвольным образом устанавливать начало отсчёта на шкалах приборов, необходим особый прибор $\mathbb{I}$, единственно возможное показание которого есть единица $\mathbf{1}_{\mathbb{R}} \in \mathbb{R}$. Действительно, по сравнению с Π шкала прибора $\Pi + \lambda\mathbb{I}$ сдвинута на λ.

Если $\Pi_1, \ldots, \Pi_n$ — реальные приборы, установленные в лаборатории, то, продолжая этот процесс, можно с любым полиномом $p(x_1, \ldots, x_n)$ связать виртуальный прибор $p(\Pi_1, \ldots, \Pi_n)$, показание которого есть $p(a_1, \ldots, a_n)$ всякий раз, когда $a_1, \ldots, a_n$ являются показаниями приборов $\Pi_1, \ldots, \Pi_n$ соответственно. Таким образом, определённые выше операции сложения и умножения превращают алгебру всех виртуальных приборов в алгебру, изоморфную алгебре полиномов $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$.

Можно, однако, пойти ещё дальше и придать статус прибора более общим, чем арифметическим, операциям над показаниями реальных приборов. Здесь возникают различные варианты, и мы ограничимся самым простым и естественным из них. Именно, введём в рассмотрение виртуальные приборы вида $f(\Pi_1, \ldots, \Pi_n)$, где $f(x_1, \ldots, x_n)$ — гладкая, т. е. бесконечно дифференцируемая функция, которые определяются подобным же образом. Поэтому лаборатория как совокупность (виртуальных) приборов представляет собой с математической точки зрения алгебру, изоморфную алгебре $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ гладких функций на n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Прибор $\mathbb{I}$ является единицей этой алгебры.

Итак, подводя итог предыдущим рассуждениям и с тем, чтобы иметь максимально возможную гибкость при дальнейших уточнениях, мы будем считать, что

математической формализацией понятия физической лаборатории является подходящая коммутативная алгебра с единицей над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$.

Следует подчеркнуть, что приведённые выше соображения справедливы только для систем с конечным числом степеней свободы. Для наблюдения систем с бесконечным числом степеней свободы требуется *бесконечное, т. е. очень большое* число приборов, и в этом случае требуется другой, значительно более деликатный подход, который здесь не обсуждается.

В классической физике о конкретном состоянии изучаемой физической S системы мы судим только по результатам наблюдения, т. е. по совокупности показаний всех приборов. В этом смысле «состояние» и «наблюдение» являются тождественными понятиями. Математически *наблюдение* можно мыслить как отображение $h\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ алгебры $\mathcal{A}$ всех приборов, сопоставляющее прибору П его показание $h(\Pi)$. С другой стороны, из определения арифметических операций над приборами очевидным образом следует, что h является гомоморфизмом алгебр с единицей, т. е. таким, что $h(\mathbb{I}) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}}$. Важно при этом отметить, что не всякий такой гомоморфизм $h\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ является наблюдением системы S. Действительно, в лаборатории могут наблюдаться самые разнообразные системы, результаты наблюдений над которыми не обязаны быть одинаковыми. Чтобы отличать эти результаты, естественно воспользоваться следующей конструкцией.

Пусть идеал $\mathcal{I}_S \subset \mathcal{A}$ есть пересечение всех идеалов $\operatorname{Ker} h$, где h есть наблюдение над S, и $\mathcal{A}_S \overset{\text{def}}{=} \mathcal{A}/\mathcal{I}_S$. Тогда всякий такой гомоморфизм h можно представить в виде композиции

$$\mathcal{A} \xrightarrow{pr} \mathcal{A}_S \xrightarrow{\tilde{h}} \mathbb{R},$$

где pr есть естественная проекция и $\tilde{h}(a \mod \mathcal{I}_S) = h(a)$. Обратно, при некоторых естественных ограничениях на алгебру $\mathcal{A}$, которые мы здесь опускаем, всякий гомоморфизм $\mathcal{A}_S \to \mathbb{R}$ в композиции с проекцией pr является наблюдением системы S. Таким образом, совокупность состояний системы S отождествляется с множеством унитарных гомоморфизмов алгебры $\mathcal{A}_S$ в $\mathbb{R}$. Оно обозначается $\operatorname{Spec}_{\mathbb{R}} \mathcal{A}_S$ и называется $\mathbb{R}$-*спектром* алгебры $\mathcal{A}_S$. Итак, все эти рассуждения указывают на то, что целесообразно считать, что

алгебра $\mathcal{A}_S$ является математической моделью физической системы S, а множество $\operatorname{Spec}_{\mathbb{R}} \mathcal{A}_S$ — совокупностью её состояний.

Алгебру $\mathcal{A}_S$ иногда принято называть *алгеброй наблюдаемых*, а её элементы, т. е. (виртуальные) приборы — *наблюдаемыми величинами* или просто *наблюдаемыми*.

Если, по приведённым выше соображениям, принять, что $\mathcal{A} = C^\infty(\mathbb{R}^n)$, то $\operatorname{Spec}_{\mathbb{R}} \mathcal{A}/\mathcal{I}$, где $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$ — некоторый идеал, можно естественным образом отождествить с некоторым замкнутым подмножеством в $\mathbb{R}^n$. С другой стороны, из практики известно, что пространствами состояний механических и других физических систем с конечным числом степеней свободы являются гладкие многообразия. Исходя из этого можно заключить, что алгебра наблюдаемых такой системы имеет вид $\mathcal{A}_S = C^\infty(M)$, где M — некоторое гладкое подмногообразие в $\mathbb{R}^n$.

После Д. Гильберта и Н. Бурбаки принято считать, что теория множеств лежит в основании всей математики. К этому упрощающему и поэтому удобному и популярному утверждению, однако, не следует относиться слишком серьёзно по целому ряду причин. В частности, даже тогда, когда математики занимаются тем, что им предписывает Н. Бурбаки, т. е. множествами с той или иной структурой, они явно или неявно сталкиваются с вопросом, как различать элементы такого множества, с тем чтобы с ними было возможно должным образом манипулировать. Сама теория множеств, естественно, не может предложить ответа на этот вопрос, и поэтому всякий раз элементы рассматриваемого множества приходится тем или иным способом помечать. Введение декартовых координат — замечательный пример этому. И здесь уместно заметить, что именно благодаря им удалось сделать революционный шаг в развитии геометрии, перейдя от весьма ограниченной в своих возможностях евклидовой геометрии к геометрии аналитической. Более того, нетрудно заметить, что метод декартовых координат эквивалентен интерпретации n-мерного евклидова пространства как спектра алгебры полиномов $\mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}\,\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$.

* * *

Книга состоит из двадцать одной главы и организована следующим образом.

Глава 1 содержит серию примеров гладких многообразий, взятых из различных разделов математики, механики и физики. Анализ этих примеров позволяет дать предварительное представление о понятии гладкого многообразия как с классической дифференциально-геометрической точки зрения (соответствующее формальное определение появляется только в главе 5), так и с алгебраической точки зрения (о которой рассказывается в главах 3 и 4). Эквивалентность двух подходов доказывается в главе 7.

В главе 3 также появляется важное для дальнейшего (и для концепции наблюдаемости) понятие *геометрической* алгебры.

В рамках алгебраического подхода гладкие (т. е. бесконечно дифференцируемые) многообразия появляются как $\mathbb{R}$-спектры некоторого класса $\mathbb{R}$-алгебр (которые мы называем *гладкими*), а их элементы оказываются гладкими функциями, определёнными на соответствующих спектрах. Здесь под $\mathbb{R}$-спектром некоторой $\mathbb{R}$-алгебры A понимается множество всех её $\mathbb{R}$-гомоморфизмов в алгебру $\mathbb{R}$, т. е. множество, которое «наблюдаемо» средствами этой алгебры. Таким образом, гладкие многообразия — это «миры», наблюдение которых может быть выполнено с помощью гладких алгебр. В силу алгебраической универсальности описанного выше подхода «негладкие» алгебры позволят нам наблюдать «негладкие миры» и изучать их особенности с помощью дифференциального исчисления. Но это дифференциальное исчисление не является тем наивным исчислением, которое изучают в стандартных университетских курсах; это гораздо более сложная конструкция.

Основам этого дифференциального исчисления и посвящена вторая часть книги. В главе 9 мы «открываем» понятие дифференциального оператора *над коммутативной алгеброй*, тщательно анализируя простейшее понятие классического дифференциального исчисления — понятие производной (а точнее касательного вектора). Помимо этого, в ней последовательно обсуждаются с новой точки зрения простейшие конструкции дифференциального исчисления, например касательное и кокасательное расслоения, вплоть до расслоения джетов, необходимого для доказательства эквивалентности «алгебраического» и стандартного определений дифференциального оператора в том случае, когда основная алгебра является алгеброй гладких функций на гладком многообразии.

В главе 10 показывается, как классическое понятие символа линейного дифференциального оператора может быть определено в общей алгебраической ситуации. Как иллюстрация возможностей «алгебраического» дифференциального исчисления в этой главе приводится построение гамильтонова формализма над произвольной коммутативной алгеброй.

Одиннадцатая и двенадцатая главы посвящены изучению расслоений и векторных расслоений с алгебраической точки зрения. Это логически необходимо для последовательного развития дифференциального исчисления в духе главы 9. Там, в частности, устанавливается эквивалентность категории векторных расслоений над многообразием M и категории конечно порождённых проективных модулей над гладкой алгеброй $C^\infty(M)$.

Последние девять глав этой книги являются новыми, в шести из них развивается дифференциальное исчисление в категории модулей над коммутативными алгебрами, показывается, что это исчисление является обобщением дифференциального исчисления на гладких многообразиях, и указывается на некоторые области математики, в которых оно используется или может быть использовано. На этом пути описываются основные функторы дифференциального исчисления, которые мы называем *диффункторами*.

В главе 13 объясняется, как в общем контексте коммутативных алгебр происходит локализация дифференциальных операторов (которая получается автоматически в классической теории). Тем самым показывается, что алгебраическая теория обобщает классическую и в этом отношении.

В главе 14 мы изучаем модуль дифференциальных форм первого порядка и модули джетов в классическом и алгебраическом вариантах. Завершается эта глава описанием модулей джетов произвольного векторного расслоения и объяснением универсальной роли, которую эти модули играют в теории дифференциальных операторов.

Главы 15–17 посвящены изучению диффункторов, представляющих объектов для них и универсальных операторов. В этих главах, в частности, вводится понятие косимвола, определяются комплексы де Рама и Спенсера.

В главе 18 продолжается изучение последовательности Спенсера, связанных с ней диффункторов, а также комплекса де Рама и дифференциальных форм.

Последние три главы по стилю отличаются от предыдущих, они не так самодостаточны, содержат несколько ссылок на недавние публикации и посвящены темам недавних (или даже текущих) исследований.

В главе 19 показывается, как концептуально переопределённое и естественным образом обобщённое понятие дифференциальной формы становится неотъемлемой и очень важной частью дифференциального исчисления над коммутативными алгебрами. Приложения включают определение и изучение симплектических, пуассоновских и контактных многообразий, уравнений Монжа — Ампера, производной Ли, инфинитезимальных симметрий, дифференцирования векторных расслоений, полей Киллинга, скобок Якоби и т. д.

В главе 20 исследуются когомологии введённых ранее комплексов де Рама и Спенсера, приводятся примеры и методы их вычисления, такие как использование операторов гомотопии. Вводится понятие относительных комплексов де Рама, в терминах которых формулируется когомологическая теория интегрирования. Последние разделы главы посвящены алгебраическому определению сопряжённого оператора и интегральных форм.

В главе 21, последней главе книги, даётся краткий набросок теории линейных дифференциальных операторов для коммутативных градуированных алгебр (=супералгебр), приводятся примеры вычисления функторов дифференциального исчисления и примеры применения этой теории в математике и физике. Среди этих примеров читатель найдёт описание дифференциальных операторов в алгебрах Грассмана, определение n-арной скобки Баталина — Вилковысского и др. Завершает главу описание того, как в этой теории возникает понятие березиниана.

Забегая вперёд и выходя за рамки этой книги, отметим, что механизм квантовой наблюдаемости имеет принципиально когомологическую природу и является подходящей специализацией тех естественных методов наблюдения решений (нелинейных) дифференциальных уравнений в частных производных, которые постепенно проясняются в результате развития *вторичного дифференциального исчисления* (см. [5]) и новой ветви математической физики, называемой *когомологической физикой*.

Настоящая книга адресована в первую очередь начинающим математикам и физикам, но не только им, а и всем, кто допускает, что может знать не всё о дифференциальном исчислении и тех геометрических образах, которые естественным образом ассоциируются с его структурами. Для её понимания требуется минимальная математическая подготовка в пределах стандартных университетских курсов многомерного анализа, линейной и общей алгебры, а также некоторый навык категорного мышления.

С тем чтобы не отвлекаться от основной линии, мы также предполагаем известными следующие элементарные факты, аккуратное изложение которых заняло бы достаточно много места и, сверх того, было бы скучно. Это разбиение единицы, теорема Уитни о погружении и теоремы о неявной и об обратной функции.

Несколько слов об истории создания книги и наблюдаемости Джета Неструева

В 1969 году Александр Виноградов, которому принадлежат идея и основные оригинальные наблюдения этой книги, начал вести на мехмате МГУ семинар, целью которого было разобраться в математической подоплёке квантовой теории поля. В нём приняли участие некоторые студенты-математики, его ученики, и несколько молодых физиков, инвариантную компоненту которых образовали Дмитрий Попов, Владимир Холопов и Владимир Андреев. Через пару лет стало ясно, что известные трудности КТП проистекают оттого, что физики для выражения своих мыслей пользуются неподходящим математическим языком, и что подходящий язык попросту неизвестен (см. эпиграф). Если, например, проанализировать то, что физики называют принципом ковариантности, выясняется, что всякое серьёзное изложение его самого и его последствий предполагает концептуально правильное определение понятий дифференциального оператора, дифференциального уравнения или, скажем, дифференциальной формы второго порядка.

По этой причине в 1971 году от физического семинара отделился математический, который занялся изучением структуры дифференциального исчисления и выяснением того, что является аналогом алгебраической геометрии для систем (нелинейных) дифференциальных уравнений с частными производными. Одновременно с этим А. М. Виноградов начал читать соответствующие спецкурсы.

Первое время участники этих семинаров и слушатели спецкурсов обходились весьма схематичными набросками лекций и собственными записками. Однако лет через десять сделалось очевидно, что накопившиеся за это время материалы должны быть систематически обработаны и записаны. Таким образом, в начале восьмидесятых годов родился Джет Неструев, т. е. группа математиков, решившая написать бесконечную серию книг под названием «Элементы дифференциального исчисления». Тогда был составлен подробный план первых выпусков и написан первый из них, содержание которого соответствует первым восьми главам этой книги.

Затем, с почти пятнадцатилетним перерывом, вызванным рядом объективных и субъективных причин, был написан второй выпуск, который, сплавленный с первым, составил первое издание «Гладких многообразий и наблюдаемых», вышедшее на русском языке в издательстве МЦНМО (2000) и на английском в Шпрингере (2002). Когда в 2016 году редакция Шпрингера предложила переиздать книгу, то сразу стало ясно, что её следует не только обновить, но и существенно расширить, поскольку главный герой книги — дифференциальное исчисление над коммутативными алгебрами — заметно вырос и возмужал за последние двадцать лет, найдя новые приложения своим силам как в математике, так и в физике.

В итоге число глав увеличилось с 11 до 21, а число страниц — практически вдвое. Джет Неструев пытался не нарушать основные принципы первого издания, в частности «принцип наблюдаемости», который определяет взаимосвязь математики с физикой. Он старался также сохранить книгу как можно более автономной и не повышать уровня требований к подготовке читателя.

Читатель, желающий узнать, что осталось за рамками книги, может ознакомиться со списком литературы на с. 440 или более полной библиографией в книге [1] и статье [33]. Но в душе Джет Неструев надеется на большее: на то, что читатель без опаски отправится в *terra incognita*, выбрав одну из многочисленных областей математики или физики, в которых может быть применён описанный в книге подход, и, вооружившись изложенными в ней методами, откроет подходящие (и, можно надеяться, красивые!) математические объяснения реальных явлений, которые в настоящее время кажутся загадочными.

Джет Неструев является сугубо штатским философом и над ним не тяготеет бремя военной тайны, как над известным французским генералом. Поэтому нет никакого секрета в том, что в написании этой книги изначально приняли участие А. М. Асташов, А. В. Бочаров, А. М. Виноградов, М. М. Виноградов, С. В. Дужин и А. Б. Сосинский. Рисунки выполнены А. М. Асташовым. Над вторым изданием работали А. М. Асташов, А. М. Виноградов, М. М. Виноградов и А. Б. Сосинский.

Джет Неструев выражает свою крайнюю признательность за неоценимую помощь И. С. Красильщику, прочитавшему книгу в рукописи, замечания которого позволили сделать её существенно лучше.

Джет Неструев
Москва, Россия — Лиццано ин Бельведере, Италия
Ноябрь 2020 г.