Что такое арифметика?

Б. Л. Пастернак писал, что «заготовленные неожиданности скучнее арифметических задач». Идея, будто арифметические задачи — образец скучности, не случайна: многочисленные сборники их полны отупляющих упражнений в применении заранее заготовленных рецептов, не предполагающем ни умственных усилий, ни какого-либо интереса к обсуждаемым вопросам (и к их ответам).

Простейшим путем избежать этой нудной потери времени, во время которого, как говорил Маяковский, «ведь растет человек — глуп и покорен», является полная отмена арифметики в школе (а «ежесекундно извлекать квадратный корень», как продолжил свою мысль Маяковский, мог бы и компьютер).

Предлагаемая книжка защищает другой путь — арифметические задачи таят огромные возможности для того, чтобы научить решающих их школьников *самостоятельно думать*, анализируя неочевидные жизненные ситуации, приходя к *пониманию* первопричин разных явлений природы и жизни (а также к *оценке* возможных последствий принимаемых решений).

Дело в том, что за одной и той же (и даже иногда простой) математической процедурой скрываются порой совершенно разные жизненные ситуации, и арифметические задачи — прекрасный путь к умению в этих ситуациях разбираться.

Вот ряд таких задач (из пары десятков примеров со страниц книги 21—23, посвященных одной и той же процедуре):

— сколько из трех яблок останется, если съесть одно из них?

— сколько распилов делят бревно на 3 части?

— на сколько число братьев в Таниной семье больше числа сестер, если у Тани на 3 брата больше, чем сестер?

— сколько сотен лет назад основан университет, который будет через 100 лет праздновать свой трехсотлетний юбилей?

Трудности этих четырех несхожих вопросов совсем разные. Хотя все они решаются «одинаково», догадаться об этом нелегко.

Не стану утомлять читателя другими иллюстрациями формулы $3-1=2$: в книге он найдет и их, и десятки более трудных арифметических задач. Эти задачи, по моему опыту, легче даются дошкольникам, чем школьникам, а школьникам легче, чем студентам, превосходящим в этом, впрочем, своих профессоров.

Фигаро недаром говорил, что его работа требует ежедневно «больших умственных усилий, чем управление и Гренадой, и Севильей вместе». Точно так же приведенные ниже арифметические задачи учат куда большему, чем сложение пятизначных чисел столбиком (или чем то вычитание единицы из тройки, которое решает приведенные выше 4 задачи).

Из стакана с красным вином перелили ложку в бочку с белым вином, а потом такую ложку (плохо перемешанной) смеси перелили обратно в стакан. Чего больше в результате: красного вина в бочке белого или белого в стакане красного? (См. с. 25.)

В заключение приведу еще другую арифметическую задачу (где дошкольники обгоняют нобелевских лауреатов, как я проверил экспериментально):

— книжный червь прогрыз (кратчайшим путем) от первой страницы стоявшего на полке первого тома Пушкина до последней страницы стоявшего рядом второго. Страницы каждого тома составляют (в толщину) 2 сантиметра, а каждая обложка — 2 миллиметра. Какое расстояние прогрыз червь?

Ответ в этой задаче (4 миллиметра!) столь неожидан, что родители решивших ее дошкольников неспособны обычно ни найти его, ни понять (я посоветовал бы затруднившемуся читателю нарисовать чертеж, как выглядят соседние тома, стоящие рядом на полке). Декарт запретил в математике чертежи, чтобы сделать подобные задачи недоступными.

Хотя предлагаемая книжка адресована не решателям задач, а их составителям, школьники (не боящиеся пропускать мимо ушей философские обобщения уже понятых ими очевидных доводов) тоже сумеют её использовать: эта книга учит разбираться в жизни больше, чем в хитросплетениях псевдонаучной болтовни.

Написавший эту книгу математик, мой отец Игорь Владимирович Арнольд (1900—1948) был первым доктором педагогических наук в СССР и членом-корреспондентом Академии педагогических наук.

В год его смерти мне исполнилось 11 лет, но я ничему математическому у него не научился: он обучал меня скорее альпи-

низму и любви к дальним странствиям, резьбе по дереву и строительству шалашей, рыбной ловле и лыжам.

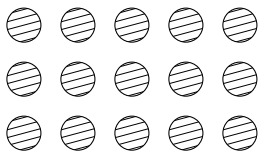
А когда я пытался узнать от него, почему в школе учат, будто произведение минуса на минус есть плюс, то этот ученик алгебраиста Эмми Нётер ответил так: «Вещественные числа удовлетворяют аксиомам кольца (например, что $(a+b)c = ac + bc$), а если бы произведение минуса на минус не было плюсом, то эта аксиома дистрибутивности нарушалась бы».

Я никак не мог понять: а зачем мне нужно, чтобы выполнялись аксиомы? С тех пор я сохраняю полное неприятие всех дедуктивно-аксиоматических картезиански-декартовских построений как антинаучной болтовни, противоречащей естественнонаучному подходу, основанному на экспериментах.

Для себя я понял правило знаков $(-)\cdot(-) = (+)$ только год спустя, решая такую задачу: «Прилив в городе N был сегодня в полдень. Когда он будет завтра?»

Длительности суток и месяца позволяют легко сообразить, что разница составит около 50 минут. Но будет ли прилив на 50 минут раньше полудня или позже его, позволяет определить только правило знаков (если знаешь, что вращение Земли происходит «с запада на восток» и вокруг оси, и вокруг Солнца).

Арифметика — самый короткий путь к пониманию природы, так как имеет дело с самыми простыми, самыми фундаментальными экспериментальными фактами (например, что пересчёт камней «по строкам» и «по столбцам» всегда приводит к одному результату):

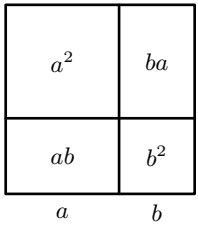


$$5+5+5 = 3+3+3+3+3.$$

Именно эти *экспериментальные факты* и составляют базу арифметики (называемую алгебраистами «набором аксиом»: $ab = ba$ и т. д.).

Способность нашего мозга к *обобщению* таких наблюдений сродни выработке условных рефлексов Павлова у собак. Например, разрезая (вслед за Жан-Жаком Руссо) квадрат со стороной

длины $a+b$ на четыре прямоугольника, мы получаем начинающую «бином Ньютона» алгебры арифметическую теорему



$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

так что простые арифметические задачи — кратчайший путь ко всей математике и ко всему естествознанию.

В. И. Арнольд