

## Оглавление

Предисловие .....	9
Введение .....	11

### Часть I

<b>СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ</b>	<b>21</b>
---	-----------

<b>Глава 1. Элементы теории классификации</b> .....	<b>22</b>
---	-----------

1.1. Задача классификации .....	22
---------------------------------	----

1.1.1. Байесовский классификатор .....	22
--	----

1.1.2. Постановка задачи классификации .....	25
--	----

1.1.3. Линейные классификаторы: перцептрон .....	28
--	----

1.2. Теория обобщения .....	34
-----------------------------	----

1.2.1. Верхние оценки вероятности ошибки классификации .....	34
---	----

1.2.2. VC-размерность .....	44
-----------------------------	----

1.3. Теория обобщения для задач классификации с помощью пороговых решающих правил .....	53
--	----

1.3.1. Пороговая размерность и ее приложения .....	54
--	----

1.3.2. Покрытия и упаковки .....	60
----------------------------------	----

1.4. Средние по Радемахеру .....	66
----------------------------------	----

1.5. Средние по Радемахеру и другие меры емкости класса функций .....	73
--	----

1.6. Задачи и упражнения .....	76
--------------------------------	----

<b>Глава 2. Метод опорных векторов</b> .....	<b>80</b>
--	-----------

2.1. Оптимальная гиперплоскость .....	80
---------------------------------------	----

2.2. Алгоритм построения оптимальной гиперплоскости .....	84
---	----

2.3. Оценка вероятности ошибки обобщения через число опорных векторов .....	87
--	----

2.4. SVM-метод в пространстве признаков .....	88
---	----

2.5. Ядра .....	91
-----------------	----

2.6. Гильбертово пространство, порожденное воспроизводящим ядром . . . . .	95
2.6.1. Каноническое RKHS . . . . .	96
2.6.2. Теорема о представителе . . . . .	100
2.7. Случай неразделимой выборки . . . . .	102
2.7.1. Переменные мягкого отступа . . . . .	102
2.7.2. Оптимизационные задачи для классификации с ошибками . . . . .	104
2.8. Среднее по Радемахеру и оценка ошибки классификации .	110
2.9. Задача многомерной регрессии . . . . .	114
2.9.1. Простая линейная регрессия . . . . .	114
2.9.2. Гребневая регрессия . . . . .	117
2.10. Регрессия с опорными векторами . . . . .	119
2.10.1. Решение задачи регрессии с помощью SVM . . . . .	119
2.10.2. Гребневая регрессия в двойственной форме . . . . .	124
2.11. Нелинейная оптимизация . . . . .	128
2.12. Конформные предсказания . . . . .	132
2.13. Задачи и упражнения . . . . .	134
2.14. Лабораторные работы . . . . .	137

## **Часть II**

<b>ОНЛАЙН-МЕТОДЫ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ</b>	<b>139</b>
<b>Глава 3. Универсальные предсказания</b> . . . . .	<b>140</b>
3.1. Последовательные вероятностные предсказания . . . . .	140
3.1.1. Смешивающий предсказатель . . . . .	141
3.1.2. Правило Лапласа . . . . .	142
3.1.3. Оптимальный минимаксный предсказатель . . . . .	145
3.1.4. Приложения . . . . .	146
3.2. Калибруемость прогнозов . . . . .	149
3.3. Алгоритм вычисления калибруемых прогнозов . . . . .	154
3.4. Прогнозирование с произвольным ядром . . . . .	159
3.5. Универсальная алгоритмическая торговая стратегия . . . . .	164
3.5.1. Калибруемость с дополнительной информацией . . . . .	169
3.5.2. Доказательство теоремы 3.6 . . . . .	178
3.6. Задачи и упражнения . . . . .	182
3.7. Лабораторные работы . . . . .	183

<b>Глава 4. Предсказания с использованием экспертных стратегий</b> . . . . .	<b>185</b>
4.1. Алгоритм взвешенного большинства . . . . .	186
4.2. Алгоритм оптимального распределения потерь в режиме онлайн . . . . .	190
4.3. Усиление простых классификаторов — бустинг . . . . .	195
4.4. Алгоритм следования за возмущенным лидером . . . . .	202
4.5. Алгоритмы экспоненциального смешивания: общий подход . . . . .	212
4.5.1. Экспоненциально смешанные потери и их свойства . . . . .	212
4.5.2. Анализ алгоритма Hedge с переменным параметром обучения . . . . .	216
4.6. Алгоритмы экспоненциального смешивания экспертных прогнозов . . . . .	219
4.6.1. Детерминированные прогнозы . . . . .	219
4.6.2. Рандомизированные прогнозы . . . . .	222
4.7. Алгоритм отслеживания наилучшей комбинации экспертов Fixed-Share . . . . .	226
4.7.1. Составные эксперты и алгоритмы для них . . . . .	227
4.7.2. Теорема об эквивалентности двух алгоритмов . . . . .	232
4.7.3. Регрет алгоритма Fixed-Share . . . . .	233
4.8. Схемы смешивания апостериорных распределений экспертов . . . . .	234
4.9. Предсказания с экспертами в условиях частичного мониторинга . . . . .	241
4.10. Задачи и упражнения . . . . .	247
4.11. Лабораторные работы . . . . .	249
<b>Глава 5. Агрегирующий алгоритм Вовка</b> . . . . .	<b>250</b>
5.1. Смешиваемые функции потерь . . . . .	250
5.2. Конечное множество экспертов . . . . .	255
5.3. Бесконечное множество экспертов . . . . .	260
5.4. Произвольная функция потерь . . . . .	262
5.5. Логарифмическая функция потерь . . . . .	263
5.6. Простая игра на предсказания . . . . .	267
5.7. Игра с квадратичной функцией потерь . . . . .	269

5.8. Метод защитных предсказаний и агрегирующий алгоритм . . . . .	272
5.9. Универсальный портфель . . . . .	277
5.10. Многомерная онлайн-регрессия . . . . .	284
5.10.1. Многомерная регрессия с помощью агрегирующего алгоритма . . . . .	284
5.10.2. Переход к ядерной многомерной регрессии . . . . .	290
5.10.3. Ядерная форма гребневой регрессии . . . . .	292
5.11. Задачи и упражнения . . . . .	293
5.12. Лабораторные работы . . . . .	294
<b>Глава 6. Выпуклая онлайн-оптимизация . . . . .</b>	<b>296</b>
6.1. Алгоритмы следования за лидером FTL и FTRL . . . . .	296
6.2. Онлайн градиентный спуск . . . . .	304
6.3. Онлайн зеркальный спуск и связанные с ним вопросы . . . . .	308
6.4. Задачи и упражнения . . . . .	316

### Часть III

#### **Игры и предсказания . . . . . 317**

#### **Глава 7. Элементы теории игр . . . . . 318**

7.1. Антагонистические игры двух игроков . . . . .	318
7.2. Достаточное условие существования седловой точки . . . . .	321
7.3. Смешанные расширения матричных игр . . . . .	323
7.3.1. Минимаксная теорема . . . . .	323
7.3.2. Чистые стратегии . . . . .	324
7.3.3. Решение матричной игры типа $2 \times M$ . . . . .	327
7.3.4. Решение игры типа $N \times M$ . . . . .	329
7.3.5. Конечная игра между $K$ игроками . . . . .	331
7.4. Задачи и упражнения . . . . .	336

#### **Глава 8. Теоретико-игровая интерпретация теории вероятностей . . . . . 337**

8.1. Теоретико-игровой закон больших чисел . . . . .	337
8.2. Теоретико-игровая вероятность . . . . .	341
8.3. Игры на универсальные предсказания . . . . .	347
8.4. Рандомизированные калибруемые предсказания . . . . .	351
8.5. Задачи и упражнения . . . . .	356

---

<b>Глава 9. Повторяющиеся игры</b> . . . . .	<b>359</b>
9.1. Бесконечно повторяющиеся игры двух игроков с нулевой суммой . . . . .	359
9.2. Теорема Блекуэлла о достижимости . . . . .	364
9.3. Калибруемые предсказания . . . . .	370
9.4. Калибруемые предсказания и коррелированное равновесие . . . . .	374
9.5. Генеративно-сопоставительные сети (GAN) . . . . .	380
9.6. Задачи и упражнения . . . . .	386

#### **Часть IV**

<b>Вспомогательные утверждения</b>	<b>387</b>
<b>Глава 10. Некоторые замечательные неравенства</b> . . . . .	<b>388</b>
<b>Литература</b> . . . . .	<b>395</b>