Предисловие

Эта книга представляет собой уникальную коллекцию удивительных приложений теории вероятностей. Она возникла из серии научно-популярных статей, написанных профессором Хенком Теймсом для журнала Нидерландского общества по статистике и исследованию операций. Теория вероятностей — одна из самых захватывающих областей математики, которая используется повсеместно. Это обусловлено не только её полезностью в решении повседневных проблем и задач из разных областей науки, но также и множеством неожиданных находок и сюрпризов. В этой книге вы найдёте интересные и увлекательные истории, охватывающие широкий спектр применений теории вероятностей: от азартных игр до теории оптимальной остановки.

Книга состоит из восемнадцати коротких глав, которые можно читать в любом порядке. Мы стремились сделать книгу доступной для наиболее широкой аудитории, включая:

- студентов университетов, которым интересны примеры использования теории вероятностей в жизни, чтобы дополнить то, что они изучают на лекциях;
- преподавателей, которым нужен лёгкий и познавательный материал для занятий со студентами;
- учителей математики в средних школах и всех тех, кто хочет понять, как работает теория вероятностей и как её применять самостоятельно.

Мы искренне надеемся, что материал вызовет энтузиазм у студентов и широкой публики по отношению к теории вероятностей и предоставит учителям новый подход к преподаванию предмета.

Введение

Глава 1. Ценность кредита казино. Эта глава демонстрирует несколько удивительных приложений формулы из задачи о разорении игрока, решённой в XVII веке Христианом Гюйгенсом и Блезом Паскалем. Формула используется для анализа фактов знаменитого судебного дела Зарина против налогового управления, связанного с требованием о федеральном налоговом обложении, предъявленным налоговой службой после того, как был списан 3-миллионный долг азартного игрока Давида Зарина перед казино. Кроме того, представлены несколько интересных фактов о задаче «блуждание пьяницы», на прямой линии или в пространствах более высокой размерности. Задача о пьянице используется для оценки среднего пути фотона от центра Солнца до его поверхности.

Глава 2. Сто узников: свобода или смерть. Сто узников должны найти свои имена в одной из ста закрытых коробок, расположенных в случайном порядке. Каждый узник может открыть только 50 коробок и не может общаться с другими узниками. Если все они смогут найти свои имена, их освободят. На первый взгляд ситуация кажется безнадёжной. Тем не менее существует стратегия, обеспечивающая вероятность успеха более 30 %. Эта стратегия также может использоваться в шоу Монти Холла, версия 2.0, в котором два финалиста должны найти как машину, так и ключ от неё, спрятанные за тремя дверьми.

Глава 3. Сюрпризы на день рождения и 500 призовых машин. Чемпионат мира по футболу 2014 года с участием 32 команд по 23 игрока в каждой убедительно демонстрирует действенность теоретического решения классической задачи о днях рождения. Мы познакомимся с интересной эвристикой решения для классической задачи о днях рождения и её вариаций. Эта эвристика основана на распределении Пуассона. Мы кратко обсудим происхождение и предпосылки распределения Пуассона, а также увидим, что задача о днях рождения возникает в канадской лотерее, в которой 500 автомобилей Oldsmobile разыгрывались в качестве бонусного приза среди 2,4 миллиона подписчиков лотереи и представители лотереи были поражены, когда один из подписчиков выиграл целых два автомобиля.

Глава 4. Была ли подтасовка в Лиге чемпионов? В марте 2013 года в спортивных передачах и социальных сетях разгорелась жаркая дискуссия о том, была ли жеребьёвка четвертьфинала Лиги чемпионов УЕФА сфальсифицирована. Формула XVIII века Реверенда Байеса может пролить свет на предполагаемое манипулирование в Лиге чемпионов. Формула Байеса и её полезность в самых разных ситуациях подробно обсуждаются в этой главе. В частности, приводятся примеры из медицины и юриспруденции. Также в главе затрагиваются фундаментальные различия между байесовской и классической статистикой.

Глава 5. Бенфорд идёт в казино. В результате закона Бенфорда привлекательная казино-игра оказывается менее выгодной, чем казалось. Этот удивительный закон утверждает, что первая ненулевая цифра во многих типах данных распределена не равномерно, а приблизительно следует логарифмическому распределению, где цифра 1 появляется в качестве первой цифры числа примерно в 30 % случаев, в то время как цифра 9 появляется в качестве первой цифры менее чем в 5 % случаев. В главе даётся интуитивное объяснение закона. Обсуждаются приложения закона Бенфорда для финансовых данных и для выявления возможных мошеннических действий.

Глава 6. Удивительные карточные игры, или Сила карт. Хитрая стратегия для победы в карточной игре с обычной колодой в 52 карты. Каждому из двух игроков нужно выбрать трёхцветную последовательность, и игроки зарабатывают по одному баллу каждый раз, когда их конкретная последовательность появляется в серии из трёх последовательных карт. Стратегия аналогична стратегии в игре Пенни, в которой каждый из двух игроков выбирает последовательность из гербов и решек длиной три. Эта игра используется для ясного введения в мощное понятие поглощающих марковских цепей. Ещё один волшебный карточный трюк, который будет обсуждаться, — это подсчёт Крускала, позволяющий фокуснику с высокой вероятностью правильно угадать выбранную игроком игральную карту в соответствии с определённой процедурой подсчёта.

Глава 7. Пропавший посадочный талон и семь гномов. Удивительное решение головоломки с потерянным посадочным талоном.

В этой головоломке сто человек стоят в очереди, чтобы сесть в самолёт. Однако первый человек в очереди потерял свой посадочный талон, поэтому он случайным образом выбирает одно из 100 свободных мест. После этого каждый входящий в самолёт либо садится на своё место, если оно свободно, либо, если нет, случайным образом выбирает свободное место. Какова вероятность того, что последний вошедший пассажир обнаружит, что его место свободно? Занимательный вариант этой задачи — проблема общежития семи гномов.

Глава 8. Метод Монте-Карло и теория вероятностей — рука руку моет. Метод Монте-Карло, названный в честь знаменитого казино в княжестве Монако, впервые был использован для решения задач диффузии нейтронов при исследовании ядерных бомб в Лос-Аламосской научной лаборатории в 1944 году. В настоящее время это один из наиболее часто используемых математических инструментов в научной практике. Мы изложим основные идеи этого метода и проиллюстрируем их геометрическими и комбинаторными задачами теории вероятностей, которые не так просто решить аналитически. Также доказывается, что метод Монте-Карло является отличным дидактическим средством для придания дополнительного стимула обучению и изучению теории вероятностей. Он может помочь студентам лучше понять вероятностные идеи и преодолеть распространённые заблуждения о природе «случайности».

Глава 9. Лотерейный абсурд: мир хочет быть обманутым. Множество книг на рынке о лото и рулетке заставляют читателей верить в существование систем, которые помогут побеждать и выигрывать. Две такие системы для лото опровергнуты с использованием нормального распределения. Несколько систем для рулетки, включая систему Лабушера и систему «Большой мартингал», подробно анализируются с использованием метода Монте-Карло. Убедительно демонстрируется, что эти системы отличаются друг от друга только схемами ставок и тем, как они перераспределяют потери и выигрыши игрока. В долгосрочной перспективе игрок не может победить казино.

Глава 10. Смертельная игра на стеклянном мосту. Одним из самых популярных телесериалов на Netflix является сериал «Игра в кальмара», выпущенный в 2021 году. Ужасающий эпизод «Стеклянные ступеньки» оригинального корейского сериала рассказывает о 16 игроках, переходящих подвисной мост из 18 ступеней. На каждой ступени у игрока есть выбор: наступить на левую или на правую плиту.

Одна из этих двух плит изготовлена из закалённого стекла, способного выдержать вес человека, а другая — из обычного стекла, которое ломается, если на него наступить. Разницу между плитами из закалённого стекла и из обычного стекла, которые случайным образом тасуются между ступенями, увидеть невозможно. Шестнадцать игроков будут пытаться перейти мост один за другим, выбирая одну из двух плит на каждом шаге. Плохая новость заключается в том, что если игрок прыгает на плиту из обычного стекла, то оно ломается и игрок падает вниз, что приводит к смерти. Хорошая новость заключается в том, что жертва будет не напрасной, потому что сломанная плита даёт всем оставшимся игрокам ценную информацию о правильности пути. С использованием анализа цепей Маркова мы найдём шансы на выживание для каждого игрока.

Глава 11. Совпадения и невозможные явления. Многие странные вещи происходят случайно. Принцип лотереи гласит, что так называемые совпадения почти всегда можно объяснить вероятностными аргументами. Но есть ли события настолько маловероятные, что они никогда не произойдут? Этот вопрос обсуждается с использованием закона Бореля, применённого к невозможным событиям, и иллюстрируется на примере практической невозможности четырёх идеальных рук в игре в бридж. Карточная игра New-Age Solitaire проливает свет на перемешивание колоды карт с помощью семи пролистываний, рекомендуемых для бриджа, и на тонкости случайности.

Глава 12. Заблуждение игрока. Ошибочные представления о том, как ведут себя по-настоящему случайные последовательности, попадают под понятие «заблуждение игрока». Это касается игрока, который верит, что если определённое событие происходит реже, чем в среднем, в течение определённого периода времени, то оно произойдёт чаще, чем в среднем, в следующий период. Это заблуждение иллюстрируется обсуждением событий, произошедших 18 августа 1913 года в казино в Монте-Карло, когда шар для рулетки остановился на чёрном поле 26 раз подряд. В главе рассмотрено правило, которое может помочь читателям оценить длину самой длинной серии при бросках монеты или вращениях рулетки. Заблуждение игрока также лежит в основе истерии в Венеции, когда в национальной итальянской лотерее число 53 не выпадало в течение многих месяцев. С использованием модели цепей Маркова показано, что подобное замечательное событие менее случайно, чем кажется.

Глава 13. Вездесущее число Эйлера *e*. Число Эйлера $e \approx 2{,}71828$ появляется во многих приложениях теории вероятностей. Оно возникает в таких задачах, как задача о Санта-Клаусе, карточная игра в Лас-Вегасе, задача о свиданиях и задача о распределении мест за обеденным столом. Для многих задач на разбиения, имеющих сложные точные решения, легко получить хорошие приближения, используя пуассоновскую эвристику.

Глава 14. 10 самых красивых формул теории вероятностей. Составление списка 10 самых красивых формул в теории вероятностей всегда субъективно. Тем не менее любой список должен содержать уравнение для нормальной (гауссовой) плотности и формулу Байеса. Оба уравнения сочетают в себе глубину и простоту. Красота формулы для нормального распределения немедленно видна благодаря её внутренней эстетической привлекательности, красота формулы Байеса заключается в том, что эта формула лежит в основе рационального мышления и принятия решений. Среди других красивых формул теории вероятностей — уравнение де Муавра для стандартного отклонения, формула разорения игрока Гюйгенса и Паскаля, а также формула Поллачека — Хинчина из теории очередей.

Глава 15. Как обмануть судьбу в лотерее. Каждый игрок в лотерею мечтает о том, как выиграть джекпот. Тем не менее шансы на выигрыш джекпота, увы, невероятно малы. Однако некоторые игроки находят или придумывают способы, чтобы увеличить эти шансы. В лотерее Вирджинии товарищество игроков выиграло джекпот, купив почти все возможные номера билетов, когда джекпот вырос настолько, что ожидаемый выигрыш за один билет был больше стоимости билета. В лотерее Cash Winfall в Массачусетсе джекпот более чем в 2 миллиона долларов разделялся и распределялся среди более низких призов, в случае если никто его не выигрывал. Игроки использовали эту возможность, чтобы купить очень большое количество билетов, когда приближалась такая игра.

Глава 16. Инвестирование и ставки — формула Келли. Критерий Келли признан одним из наиболее полезных методов для азартных игроков и инвесторов. Формула Келли вычисляет долю вашего капитала, которую нужно инвестировать, чтобы максимизировать ожидаемую прибыль в долгосрочной перспективе. Ставка по формуле Келли также максимизирует ожидаемую логарифмическую полезность вашего капитала. Формула Келли выводится с использованием закона больших чисел. Рассматривается обобщение формулы на ситуации, в которых можно делать несколько ставок одновременно на разные результаты, такие как лошадиные скачки и футбольные матчи.

Глава 17. Остановиться или не остановиться? Вот в чём вопрос. Самая известная задача об оптимальной остановке — это задача свиданий, в которой потенциальные партнёры появляются в случайном порядке и вы не знаете, какого уровня будут следующие кандидаты. Вам нужно решить, когда остановиться и сделать выбор, чтобы максимизировать шансы выбора лучшего кандидата. Для этой задачи выводятся простые правила остановки. Также рассмотрены несколько вариантов этой задачи, включая задачу о свиданиях, в которой целью является достижение максимальной вероятности выбора одного из двух или трёх лучших потенциальных партнёров. Принцип просмотра на один шаг вперёд используется для нахождения хороших правил остановки для знаменитой игры Чоу — Роббинса и игры с дьявольской монетой, в которой вы последовательно открываете ящики с денежными суммами, стараясь избежать ящика с дьявольской монетой.

Глава 18. Серия пенальти. Чтобы сделать футбольный матч ещё более захватывающим, в 1978 году ФИФА решила ввести серию пенальти для ситуаций, когда после тридцати минут дополнительного времени результат остаётся ничейным. Во время пенальти две команды поочерёдно наносят по пять ударов, и победителем становится та команда, которая в итоге забьёт большее количество голов. Если после выполнения каждой командой пяти ударов счёт остаётся равным, то серия пенальти продолжается до тех пор, пока одна из команд не получит преимущество по результатам одного раунда ударов (каждой командой пробивается по одному удару). В этой главе мы рассмотрим простую вероятностную модель для расчёта распределения вероятностей и ожидаемого значения числа ударов в пенальти. В модели предполагается, что результаты каждого последующего удара независимы друг от друга и что каждый игрок имеет одинаковую вероятность забить гол с пенальти.