

ся как Рен) (1632–1723) — английский математик и астроном, член-основатель Royal Society и в 1681–1683 гг. его президент (с 1703 г. бессменным, до своей смерти, президентом Royal Society был Исаак Ньютон, с 1705 г. — уже *сэр* Исаак Ньютон), главный архитектор Лондона на протяжении 30 лет (именно Врен руководил в 1675–1710 гг. постройкой знаменитого собора святого Павла в Лондоне). Врен сотрудничал с Гуком в разрешении вопросов, касающихся законов Кеплера и закона притяжения, а также и в делах застройки Лондона — Роберт Гук также был еще и архитектором!

Еще Гук знаменит усовершенствованием микроскопа, открытием клеточного строения организмов (именно он и ввел термин «клетка»), изобретением барометра и пр. Смысл же открытого им *закона упругости для твердых тел* в том, как уже говорилось, что этот закон ($F = -kx$) справедлив на *сравнительно широком промежутке значений отклонения x* .

Упражнения, задачи и задания к гл. I

Касательные и линейные приближения

1. Запишите линейные приближения:

- 1) для функции x^2 в точке $x_0 = 1$;
- 2) для функции $\sqrt{x}$ в точке $x_0 = 1$;
- 3) для функции $3x - 2$ в точке $x_0 = 1$.

2. Может ли

1) график функции совпадать с касательной к нему? Для каких функций?

2) касательная к графику пересекать его более чем в одной точке?

Приведите примеры.

3. Нарисуйте графики таких непрерывных функций, что

1) $D(f) = [-4; 4]$, $f(-3) = f'(0) = 0$, $f'(-3) = f(0) = 1$, $f(3) = -3$, $f'(3) = -2$;

2) $D(g) = [-1; 5]$, $g(0) = g'(1) = 0$, $g'(2) = g(2) = 1$, $g(3) = -1$, $g'(4) = -\frac{1}{2}$.

4. Напишите уравнения касательных к данным функциям в данных точках, нарисуйте эскизы графиков с касательными

1) $y = x^3$, $x_0 = 1$;

3) $y = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$.

2) $y = \frac{3}{x}$, $x_0 = -1$;

По определению углом между графиком функции и какой-то прямой в точке их пересечения называется угол между касательной к графику в этой точке и данной прямой.

Аналогично углом между двумя пересекающимися графиками называется угол между касательными к этим графикам в точке пересечения.

5. Найдите углы, под которыми пересекают ось абсцисс графики следующих функций:

1) $y = x^3 - 3x$;

2) $y = x^3 - 3x + 2$.

6. Найдите углы, под которыми пересекают ось ординат графики следующих функций:

1) $y = \frac{1}{2}(x-1)^2$;

2) $y = \frac{1}{x-1}$.

7. В каких точках касательные к графику функции $y = x^3 - x$ параллельны прямым:

1) $y = x$;

2) $y = 2x$;

3) $y = -x$;

4) $y = -2x$?

8. При каких значениях параметра a график функции $y = \frac{1}{4}(ax - x^3)$ пересекает ось абсцисс под углом 45° (хотя бы в одной точке)?

9. Найдите расстояние между ближайшими точками графиков функций:

1) $y = -2x + 1$ и $y = x^2 - 8x + 16$;

2) $y = 2x - 1$ и $y = x^4 + 3x^2 + 2x$.

10. Запишите приближенные формулы для вычисления значений:

1) $(x_0 + \Delta x)^n$, $(1 + h)^n$ ($n \in \mathbb{N}$);

2) $\sqrt[n]{x_0 + \Delta x}$, $\sqrt[n]{1 + h}$, $\sqrt[n]{a^n + h}$ ($n \in \mathbb{N}$);

3) $\frac{1}{x_0 + \Delta x}$, $\frac{1}{1 + h}$, $\frac{1}{1 - h}$, $\frac{1 + h}{1 - h}$;

4) $\frac{1}{(x_0 + \Delta x)^n}$, $\frac{1}{(1 + h)^n}$ ($n \in \mathbb{N}$).

11. Найдите приближенно, с точностью до двух знаков после запятой:

1) $\sqrt[3]{9}$,

3) $\sqrt[7]{100}$,

5) $\sqrt[3]{3}$,

7) $\sqrt[4]{17}$,

2) $\sqrt[4]{80}$,

4) $\sqrt[5]{33}$,

6) $\sqrt[3]{24}$,

8) $\sqrt[4]{9}$.

12. Сторона квадрата равна $4 \pm 0,1$ м. С какой предельной относительной погрешностью можно вычислить его площадь?

13. С какой относительной погрешностью допустимо измерить радиус шара R , для того чтобы его объем можно было определить с точностью до 1 %?

14. Считая f и f' известными, запишите линейные приближения и получите из них формулы для производных следующих функций:

1) $f^2(x)$, $f(2x)$, $f(x^2)$;

3) $f(x^2 + 2x)$, $f(1/x)$, $1/f(x)$;

2) $f^3(x)$, $f(x^3)$, $f(3x - 1)$;

4) $\sqrt{f(x)}$, $f(\sqrt{x})$.

15. Докажите, что невертикальная прямая $y = kx + m$ и парабола $y = ax^2 + bx + c$ касаются тогда и только тогда, когда эти прямая и парабола имеют единственную общую точку.

16. Докажите, что невертикальная и негоризонтальная прямая $y = kx + m$, $k \neq 0$, и гипербола $y = \frac{a}{x}$ касаются тогда и только тогда, когда эти прямая и гипербола имеют единственную общую точку.

17. Напишите уравнения касательных к графику функции $y = x^2 - 4x + 1$, проходящих через точки 1) $(0; 0)$; 2) $(-1; -3)$.