

Глава 1.1

Введение (с. 273)

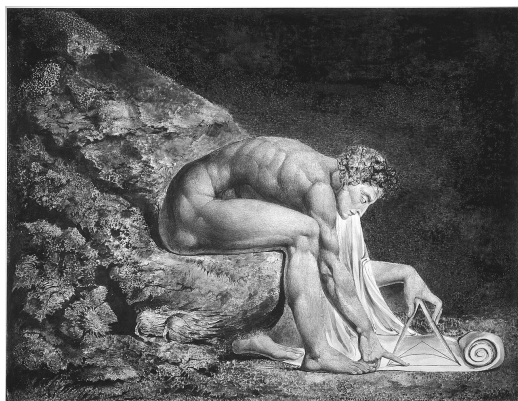
§ 1.1.1. Законы Ньютона как законы сохранения и баланса

Счастливец Ньютон, ибо картину мира можно установить лишь однажды.

Жозеф Луи Лагранж

Не знаю, кем я кажусь миру, но себе я кажусь мальчиком, который, играя на морском берегу, нашёл несколько камешков поглаже и раковин попестрее, чем удавалось другим, в то время как неизмеримый океан истины расстился неисследованным перед моим взором.

Исаак Ньютон



«Ньютон»

Гравюра (1795—1805) английского художника и поэта Уильяма Блейка

Мы предполагаем, что с основными понятиями и законами механики, такими как радиус-вектор, скорость, ускорение, энергия, импульс, момент импульса, законы Ньютона, законы сохранения

энергии, импульса и момента импульса, читатель знаком из курса общей физики, поэтому вначале (особенно во «Введении») будем их использовать без определения. По ходу курса соответствующие определения будут даваться.

1.1.1.1. Нулевой закон Ньютона (гипотеза абсолютного времени)

Классическая ньютоновская механика предполагает существование некоего *абсолютного времени*, которое течёт во всём пространстве одинаково вне зависимости от движения каких-либо объектов.

Можно сказать, что в ньютоновской механике предполагается (в некоторых книгах явно, в других — неявно), что мы можем сколь угодно точно реализовать некоторые *идеальные ньютоновские часы*, ход которых не зависит от их движения и положения в пространстве, и с их помощью задать синхронный ход времени во всём пространстве.

Это утверждение можно было бы назвать *нулевым законом Ньютона*, или, чтобы не нарушать принятой нумерации законов Ньютона, *гипотезой абсолютного времени*.

Как мы увидим далее, при изучении специальной теории относительности, гипотеза абсолютного времени неверна, хотя и является хорошим приближением для случая медленного движения (скорости много меньше скорости света, $v \ll c$).

При рассмотрении специальной теории относительности мы изучим вопрос о синхронизации часов, измеряющих время в разных точках пространства, а также о ходе движущихся часов и относительности понятия одновременности.

1.1.1.2. Три закона Ньютона

Напомним законы Ньютона в стандартной формулировке.

- 1-й закон Ньютона: существует система отсчёта (мы будем называть такую систему отсчёта *инерциальной* или и. с. о.), в которой *свободная частица* (т. е. частица, не испытывающая взаимодействия с другими телами) движется равномерно и прямолинейно.
- 2-й закон Ньютона: в и. с. о. ускорение $\mathbf{a}$ частицы с массой m связано с суммарной силой $\mathbf{F}$, действующей на частицу, соотношением $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$.

- 3-й закон Ньютона: в и. с. о. при взаимодействии двух частиц сила $\mathbf{F}_{21}$, с которой 1-я частица действует на 2-ю, и сила $\mathbf{F}_{12}$, с которой 2-я частица действует на 1-ю, противоположны: $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$. Силы $\mathbf{F}_{12}$ и $\mathbf{F}_{21}$ направлены вдоль прямой, соединяющей частицы.

1-й закон Ньютона — это утверждение о существовании систем отсчёта (с. о.) специального вида (инерциальных систем), для которых формулируются 2-й и 3-й законы. 1-й закон Ньютона не является частным случаем 2-го, как может показаться невнимательному читателю.

2-й закон Ньютона неявно предполагает, что взаимодействие частицы с окружением может быть представлено как векторная сумма некоторых воздействий (*сил*). 2-й закон Ньютона даёт нам определение понятия силы.

3-й закон Ньютона подразумевает, что силы, действующие в системе частиц, могут быть разложены на совокупность пар сил, действующих между частицами и удовлетворяющих 3-му закону Ньютона. 3-й закон Ньютона позволяет экспериментально определять отношение масс частиц, а при наличии эталона массы — массу каждой частицы.

Законы Ньютона ничего не говорят о том, какими законами выражаются величины сил, действующих между частицами, но 3-й закон Ньютона налагает на допустимые законы, задающие действующие в системе силы, некоторое ограничение.

Если дополнить законы Ньютона законами для сил, которые выражаются как функции от координат и скоростей частиц, второй закон Ньютона даёт для радиус-векторов¹

$$\mathbf{r}_a = (x_a, y_a, z_a)$$

систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_a}{dt^2} = \frac{1}{m_a} \mathbf{F}_a \left(\mathbf{r}, \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right).$$

Для такой системы можно ставить задачу Коши (вычисление $\mathbf{r}_a(t)$ по заданным $\mathbf{r}$ и $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ в начальный момент времени), т. е. задачу о вы-

¹ Векторов, составленных из декартовых координат частиц.

числении движения частиц (координат как функций от времени) по их начальным положениям и скоростям¹.

1.1.1.3. Шесть законов Ньютона (законы Ньютона как законы сохранения и баланса)

Законы Ньютона в форме, записанной выше, неприменимы вне ньютоновской механики. В частности, они не работают в теории относительности (как специальной, так и общей) и в квантовой теории. Более того, даже для ньютоновской механики в криволинейных координатах стандартные законы Ньютона неудобны.

Мы перепишем их в другой форме (законы Ньютона как законы сохранения и баланса), которая позволит отделить частности,

¹ Возможность систематического сведения задач механики к дифференциальным уравнениям в своё время глубоко впечатлила физиков. Сам Ньютон в письме Лейбницу в 1676 году приводит свой новый метод исследования функций в виде знаменитой шифровки — анаграммы Ньютона (общепринятый в те времена метод закрепления научного приоритета, которым Ньютон воспользовался только однажды):

6 aecdae 13eff 7i 3l 9n 4o 4qrr 4s 9t 12vx.

Впоследствии в «Математических началах натуральной философии» Ньютон дал расшифровку:

«Data aequatione quotcunque fluentes quantitates involvente fluxiones
invenire et vice versa».

В буквальном переводе с латыни получается

«Дано уравнение, заключающее в себе текущие количества, найти
течения (производные), и наоборот».

Смысл фразы вне контекста не очень понятен. В. И. Арнольд дал современный очень вольный перевод:

«Полезно изучать дифференциальные уравнения».

В 1814 году П. С. Лаплас придумал демона Лапласа — воображаемое существо, которое знает все уравнения динамики, соответствующие начальные условия и умеет очень быстро и точно решать задачу Коши (как вперёд по времени, так и назад по времени): «Разум, которому в каждый определённый момент времени были бы известны все силы, приводящие природу в движение, и положение всех тел, из которых она состоит, будь он также достаточно обширен, чтобы подвергнуть эти данные анализу, смог бы объять единым законом движение величайших тел Вселенной и мельчайшего атома; для такого разума ничего не было бы неясного, и будущее существовало бы в его глазах точно так же, как прошлое».

свойственные ньютоновской механике в декартовых координатах, от общих законов, сохранивших силу по сей день¹.

1а. Существует система отсчёта (мы будем называть такую систему отсчёта *инерциальной* или и. с. о.), в которой свободная частица движется равномерно по *геодезической*².

1а'. (Эквивалентен 1а.) Существует система отсчёта (мы будем называть такую систему отсчёта *инерциальной* или и. с. о.), в которой импульс свободной частицы сохраняется.

1б. Геометрия пространства евклидова.

2а. (Уравнение баланса импульса.) В и. с. о. **сила = скорость передачи импульса**³:

$$\frac{dp}{dt} = F.$$

2б. Импульс частицы **p** пропорционален скорости **v**. Коэффициент пропорциональности *m* для данной частицы постоянен и называется *массой частицы*:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}.$$

3а. В и. с. о. при парном взаимодействии частиц импульс сохраняется.

3б. В и. с. о. при парном взаимодействии частиц силы направлены вдоль прямой (геодезической), соединяющей частицы.

¹ Не надо думать, что «ньютоновская механика устарела». Ньютоновская механика — великолепная теория, которая с замечательной точностью работает в своей области применимости: для макроскопических тел, медленно движущихся в слабых полях в достаточно малом объёме пространства на протяжении не слишком большого времени. Для описания работы автомобиля ни теория относительности, ни квантовая механика не дадут ничего нового по сравнению с классической ньютоновской механикой.

² *Геодезическая*, или *геодезическая линия*, — обобщение понятия прямой — кривая, расстояние вдоль которой экстремально. В евклидовой геометрии геодезические — отрезки прямых, в сферической геометрии (в геометрии на поверхности сферы) геодезические — дуги больших кругов (большой круг — окружность на поверхности сферы, центр которой совпадает с центром сферы, например меридиан или экватор).

³ В криволинейных координатах, или искривлённом пространстве, вычисление производной от импульса по времени неоднозначно, поскольку параллельный перенос вектора вдоль кривой оказывается нетривиальной операцией. Мы обсудим соответствующий математический аппарат, включая *ковариантные производные*, как факультативный материал в дополнениях.

3б'. (При условии выполнения закона 3а эквивалентен 3б.) В и. с. о. при парном взаимодействии частиц момент импульса сохраняется.

Законы 1а, 2а, 3а универсальны.

Законы 1б, 2б, 3б модифицируются в современной физике¹.

Определение силы через закон Ньютона 2а оказывается необходимым в теории относительности, но даже в ньютоновской механике такое определение предпочтительно, если вам надо работать в криволинейных координатах или описывать системы с переменной массой (например, ракеты).

Приведённая формулировка законов Ньютона демонстрирует важность геометрии (1а, 3б) и удобство формулировки законов физики с использованием законов сохранения и сохраняющихся величин. Нам нужен систематический способ находить такие формулировки и такие величины. Такой способ дают нам различные вариационные принципы теоретической механики.

§ 1.1.2. Материальная точка не так проста!

«Частицы», для которых формулируются законы Ньютона, — это *материальные точки*.

Материальная точка — тело, для которого **в рамках данной задачи** описание движения соответствует описанию движения одной точки.

Для того чтобы тело можно было считать материальной точкой, надо, чтобы можно было пренебречь его внутренними степенями свободы, т. е. движением, не сводящимся к движению одной точки, в частности относительным движением составляющих тело частей.

¹ Формулировка закона 1а' требует на самом деле уточнения того, что значит «импульс сохраняется». Как мы увидим в следующей главе, в криволинейных координатах базисные векторы свои в каждой точке пространства. Сохранение импульса частицы здесь означает, что импульс при движении частицы подвергается *параллельному переносу* вдоль её траектории. При этом понятие параллельного переноса в искривлённом пространстве нетривиально, требует введения *ковариантного дифференцирования*, которое будет обсуждаться только в факультативной части книги.

Формулировка закона 3б' неявно подразумевает, что мы рассматриваем плоское пространство, т. е. пространство, в котором параллельный перенос не зависит от траектории. Иначе мы просто не сможем определить момент силы.

⊛ Размеры тела, представляемого материальной точкой, не обязательно малы в масштабах задачи, например, твёрдое тело, совершающее *поступательное движение* (т. е. движение, сохраняющее длину и направление любого отрезка, соединяющего пару частиц тела), можно представить материальной точкой, даже если его перемещение мало по сравнению с размерами.

Использованию приближения материальной точки сильно помогает *теорема о движении центра масс*, согласно которой центр масс любой механической системы движется как частица, масса которой равна суммарной массе системы, к которой приложены все внешние (по отношению к данной системе) силы.

Благодаря теореме о движении центра масс утечка энергии во внутренние степени свободы (например, нагревание тела) не обязательно мешает использованию приближения материальной точки. Такие процессы учитываются в зависимости сил от координат и скоростей, например, с помощью введения сил трения.

Более существенно влияние внутренних степеней свободы на момент импульса тела. Если внутренним моментом импульса тела нельзя пренебречь, то закон Ньютона 3б может не выполняться: силы взаимодействия пары частиц не обязательно направлены вдоль прямой, их соединяющей. Но закон Ньютона 3б' (закон сохранения момента импульса при парном взаимодействии) при этом всё равно выполняется, если учесть моменты сил, пытающиеся развернуть момент импульса каждой из частиц.

Например, электрический или магнитный диполь нельзя рассматривать как материальную точку: силы взаимодействия пары диполей не обязательно направлены вдоль прямой, их соединяющей. В частности, электрон, взаимодействующий с магнитным полем, нельзя рассматривать как материальную точку, поскольку у него есть собственный (не связанный с движением электрона) момент импульса (*спин*), а также магнитный дипольный момент, параллельный спину.



§ 1.1.3. Как могли бы возникнуть вариационные принципы (~)

Из сохранения энергии с учётом того, что механическая энергия может диссипировать (рассеиваться) в окружающей среде, следует принцип минимума потенциальной энергии в статике. До того как

было изобретено понятие потенциальной энергии, этот принцип формулировался применительно к случаю системы абсолютно твёрдых тел и нерастяжимых верёвок в однородном поле силы тяжести как утверждение, что в положении устойчивого равновесия высота центра масс системы минимальна.

Также с 1662 года известен принцип Ферма в оптике (принцип стационарности времени распространения светового сигнала между фиксированными точками пространства), из которого успешно выводится вся геометрическая оптика. Это давало надежду, что экстремальные принципы могут быть распространены со статики на динамику.

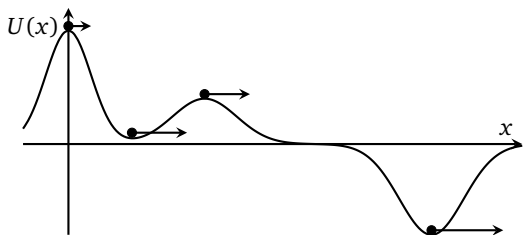
В 1744 году Мопертюи и Эйлер развили первую формулировку принципа наименьшего (экстремального, стационарного) действия применительно к оптике и механике.

Экстремальные принципы хороши тем, что они позволяют сжато описать законы для физической системы, причём экстремальная величина может быть записана через разные параметры, в результате чего мы легко можем переписать законы физики в разных переменных, в частности, для описания движения вместо декартовых координат можно брать другие непрерывные параметры, описывающие конфигурацию системы, — *обобщённые координаты* (аккуратное определение обобщённых координат будет дано ниже).

Попробуем угадать принцип стационарного действия вслед за классиками¹. По аналогии с принципом Ферма предположим, что надо искать минимум какого-то интеграла, который мы назовём *действием*. В механике естественный параметр — время, так что выберем его как переменную интегрирования. Начнём с движения частицы в потенциале (т. е. с потенциальной энергией) $U(x)$.

Подынтегральная функция должна быть по возможности малой на горках (где частица движется медленнее, т. е. задерживается), а в ямах, которые частица проскакивает быстро, подынтегральное выражение может быть больше. Первая мысль, которая возникает, — поместить под интеграл кинетическую энергию $\mathcal{E}_{\text{кин.}} = \frac{mv^2}{2}$. Однако кинетическая энергия не содержит информации о потенциале. Вторая мысль — поместить под интеграл потенциальную энер-

¹ Мы не пытаемся описать в деталях реальный путь развития науки, так что рассказ идёт не о том, как возникли вариационные принципы, а о том, как они могли бы возникнуть.



Частица наиболее быстро движется в «ямах» потенциала и замедляется на «горках»

гию со знаком минус. Однако потенциальная энергия не содержит информации о массе частицы. Третья мысль — поместить под интеграл разность кинетической и потенциальной энергий:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x) \right) dt. \quad (1.1.1)$$

Неожиданно эта мысль приводит к успеху.

Продemonстрируем это, не вдаваясь в математические подробности. (Позднее мы разберём эту процедуру, которая называется *варьированием действия*, более подробно.)

Пусть функция $x(t)$ такова, что действие S оказывается экстремальным (например, минимальным или максимальным), тогда функция $x(t) + \delta x(t)$, где функция $\delta x(t)$ — малая поправка (*вариация координаты*), должна дать такое же значение действия в линейном порядке по δx . Это аналогично тому, что мы имеем при нахождении экстремума гладкой функции одного переменного: в точке экстремума график идёт горизонтально, а потому если немного «пошевелить» значение аргумента, то в линейном порядке функция не изменится (в точке экстремума функции f выполняется условие $df = 0$):

$$\begin{aligned} S + \delta S &= \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{m(\dot{x} + \delta\dot{x})^2}{2} - U(x + \delta x) \right) dt \approx \\ &\approx \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{m(\dot{x}^2 + 2\dot{x} \cdot \delta\dot{x})}{2} - U(x) - U'(x) \cdot \delta x \right) dt = \\ &= S + \int_{t_0}^{t_1} (m\dot{x} \cdot \delta\dot{x} - U'(x) \cdot \delta x) dt. \end{aligned}$$

Здесь подынтегральное выражение имеет вид дифференциала (с заменой d на δ) от подынтегрального выражения в действии, если скорость $\dot{x}$ и координата x считаются независимыми переменными:

$$\delta\left(\frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x)\right) = m\dot{x} \cdot \delta\dot{x} - U'(x) \cdot \delta x.$$

Мы обозначили точкой производную по времени t и штрихом — производную по координате x . Вариация действия δS имеет вид

$$\begin{aligned} \delta S &\approx \int_{t_0}^{t_1} (m\dot{x} \cdot \delta\dot{x} - U'(x) \cdot \delta x) dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{d}{dt} (m\dot{x} \cdot \delta x) - m\ddot{x} \cdot \delta x - U'(x) \cdot \delta x \right) dt = \\ &= m\dot{x} \cdot \delta x \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} (m\ddot{x} + U'(x)) \cdot \delta x \cdot dt. \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

Мы ограничимся случаем, когда $\delta x(t_0) = \delta x(t_1) = 0$, т. е. концы траектории при вариации остаются фиксированными (будем считать, что нас пока интересует поведение частицы внутри промежутка¹ (t_0, t_1)). Таким образом, для стационарного действия $\delta S = 0$ и последний интеграл обращается в нуль при произвольных значениях $\delta x(t)$ внутри интервала (t_0, t_1) . Для этого необходимо, чтобы в нуль обратилось выражение в скобках:

$$m\ddot{x} + U'(x) = 0.$$

Мы не только воспроизвели второй закон Ньютона для частицы, но и получили закон для силы, создающей потенциал $U(x)$:

$$m\ddot{x} = F, \quad \text{где} \quad F = -U'(x).$$

¹ Как видно из формулы (1.1.2), вклад в вариацию отдельной точки внутри интервала (t_0, t_1) бесконечно мал: конечный вклад даёт только интеграл по конечному интервалу времени. В то же время вклад в вариацию граничных точек интервала конечен: $m\dot{x} \cdot \delta x \Big|_{t_0}^{t_1}$. По этой причине удобно считать, что действие имеет два числовых аргумента — координаты концов траектории $x(t_{0,1})$ и один функциональный аргумент $x(t)$:

$$S = S[x_0, x_1; x(t) : t \in (t_0, t_1), x(t_{0,1}) = x_{0,1}].$$

Естественно дифференцировать (варьировать) действие по функциональному аргументу $x(t)$, зафиксировав числовые аргументы: $x_{0,1} = x(t_{0,1})$.

Мы записали действие в виде интеграла от некоторой функции $L(x, \dot{x}) = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x)$, которая называется *функцией Лагранжа* (или *лагранжианом*):

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(x, \dot{x}) dt.$$

Как мы в дальнейшем увидим, лагранжианы могут быть разными¹, но уже на этом примере можно показать, как из лагранжиана получаются такие важные величины, как импульс, сила, энергия:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad F = \frac{\partial L}{\partial x} = -U'(x), \quad \mathcal{E} = p \cdot \dot{x} - L = \frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x).$$

В каждой из этих формул выражение через лагранжиан и производные от него, как мы увидим далее, является универсальным, а выражение через массу и потенциал — частным случаем.

С использованием *лагранжева формализма* мы будем изучать не только ньютоновскую механику, но и специальную теорию относительности и электродинамику (в следующем семестре).

§ 1.1.4. Обобщённые координаты

1.1.4.1. Если мы хотим использовать не только декартовы координаты (~)

Введение действия, как мы увидели пока на простейшем примере, позволяет систематически находить выражения для энергии, импульсов и сил. Оказывается, этот формализм работает не только для декартовых координат. Мгновенное состояние механической системы (положение всех её частей) можно описать набором чисел, которые задают координаты точки в некотором *конфигурационном пространстве*. Изменение со временем состояния системы задаёт траекторию в конфигурационном пространстве. При этом можно по-разному «нумеровать» (параметризовать) точки конфигурационного пространства с помощью числовых параметров (обобщён-

¹ Шаблон «кинетическая энергия минус потенциальная» не универсален, что мы скоро увидим на конкретных задачах. Часто лагранжианы не столько выводят, сколько угадывают. Основной метод, который используют при угадывании лагранжиана, — соображения симметрии.

ных координат). Переход от одних координат к другим координатам — это изменение описания движения, а не самого движения¹.

Действие тоже можно выражать через обобщённые координаты. Если это делать правильно (чтобы действие для одного движения, описанного в разных координатах, было одинаковым), то и уравнения движения, полученные из вариации действия, в разных координатах будут эквивалентными.

Примеры обобщённых координат для точки: полярные координаты на плоскости, цилиндрические координаты в пространстве, сферические координаты в пространстве. Если система состоит из нескольких материальных точек, то мы можем разные материальные точки описывать, используя разные системы координат, например, если у нас есть цепочка грузиков, соединённых пружинками, то может быть удобно координаты каждого грузика отсчитывать от его положения равновесия.

Если в системе есть какие-то связи, фиксирующие некоторые соотношения между координатами отдельных материальных точек (такие связи называются *голономными*), например, какие-то точки образуют твёрдое тело и расстояния между ними фиксированы, или какие-то точки соединены невесомыми нерастяжимыми нитями или невесомыми абсолютно твёрдыми стержнями, то количество обобщённых координат можно сократить. Твёрдое тело в трёхмерном пространстве состоит из большого числа материальных точек, но мы можем ограничиться 6 обобщёнными координатами, например: 3 координаты центра масс и 3 угловые координаты, описывающие ориентацию тела. Две шестерёнки с фиксированными осями вращения, находящиеся в зацеплении друг с другом, описываются одной обобщённой координатой, например углом поворота одной из шестерёнок.

Любые ли числовые параметры подходят в качестве обобщённых координат?

Не любые. Скажем, мы можем все координаты собрать в одно вещественное число Z , которое определим через десятичную запись так, что в него войдут все цифры всех координат: 1-я цифра 1-й координаты, 1-я цифра 2-й координаты, ..., 1-я цифра последней координаты, 2-я цифра 1-й координаты, 2-я цифра 2-й координаты, ...,

¹ Не во всяком конфигурационном пространстве декартовы координаты вообще существуют.

2-я цифра последней координаты, ... Например, таким образом мы можем взаимно однозначно отобразить точки квадрата (пары чисел $X, Y \in [0, 1]$) на точки отрезка $Z \in [0, 1]$:

$$(X = 0, x_1 x_2 x_3 x_4 \dots, Y = 0, y_1 y_2 y_3 y_4 \dots) \leftrightarrow Z = 0, x_1 y_1 x_2 y_2 x_3 y_3 \dots$$

Такой числовой параметр Z будет очень неудобен, так как его зависимость от конфигурации системы не будет непрерывной.

Поскольку обобщённые координаты должны входить в уравнения движения системы, взаимная однозначность и непрерывность потребуются при заменах координат также для обобщённых скоростей и ускорений (первых и вторых производных по времени от обобщённых координат). Это подразумевает дифференцируемость допустимых обобщённых координат.

1.1.4.2. Свойства обобщённых координат

Определение. *Материальная точка* — физический объект, для описания движения которого в пространстве достаточно (в рамках данной задачи!) задать движение в пространстве одной точки. Мгновенное положение материальной точки описывается одной точкой пространства. Кроме того, материальная точка может характеризоваться некоторым набором числовых параметров, таких как масса и электрический заряд.

Определение. *Механическая система* — набор материальных точек, для которых некоторым способом определены законы движения.

Определение. *Конфигурационное пространство механической системы* — множество всех возможных пространственных положений совокупности материальных точек системы, удовлетворяющих наложенным связям (условиям на координаты точек). Каждая точка конфигурационного пространства соответствует определённому пространственному положению всех материальных точек системы.

Для N материальных точек без связей в 3-мерном евклидовом пространстве конфигурационное пространство представляет собой $3N$ -мерное евклидово пространство, координаты точки в котором — совокупность всех координат всех материальных точек системы $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_N, y_N, z_N$.

Введение конфигурационного пространства сводит задачу о движении механической системы к задаче о движении одной точки в конфигурационном пространстве.

Мы будем рассматривать только такие конфигурационные пространства, что у каждой их точки найдётся окрестность¹, которая может быть непрерывно дифференцируемо и взаимно однозначно параметризована точками из открытого шара в $\mathbb{R}^n$, причём для любых двух точек найдутся непересекающиеся окрестности. Здесь фиксированное натуральное число n = число *степеней свободы* = размерность конфигурационного пространства².

Другими словами, в классической механике такое конфигурационное пространство представляет собой гладкую n -мерную поверхность в $3N$ -мерном евклидовом пространстве. Точки этой поверхности удовлетворяют $3N - n$ независимым уравнениям, описывающим наложенные на материальные точки связи.

Определение. *Обобщённые координаты* — вещественные числовые параметры, параметризующие точки в некоторой области конфигурационного пространства и удовлетворяющие условиям *взаимной однозначности, непрерывности и невырожденности* (см. ниже).

От набора обобщённых координат мы потребовали выполнения следующих свойств.

1. Взаимная однозначность (локальная). Обобщённые координаты в некоторой области $\mathbb{R}^n$ взаимно однозначно отображаются на некоторую область конфигурационного пространства системы.

2. Непрерывность. Точка конфигурационного пространства непрерывно зависит от обобщённых координат (в рассматриваемой области).

3. Невырожденность (локальная). Каждой точке конфигурационного пространства и каждой обобщённой координате мы можем сопоставить набор скоростей материальных точек системы, который соответствует ситуации, когда данная координата меняется с единичной скоростью, а остальные координаты фиксированы. Эти скорости должны быть определены и конечны. Для каждой точки конфигурационного пространства (в некоторой области) наборы скоростей для разных обобщённых координат должны быть линей-

¹ *Окрестность точки* — любое содержащее её открытое множество. В конфигурационном пространстве окрестности определяются через систему координат как прообразы открытых множеств в $\mathbb{R}^n$.

² На языке дифференциальной геометрии это условие формулируется так: конфигурационное пространство должно являться дифференцируемым хаусдорфовым многообразием. Дифференцируемые многообразия мы обсудим в факультативном § 2.1.2 (с. 285).

но независимы. (Можно сказать, что невырожденность — это взаимная однозначность отображения между скоростями изменения обобщённых координат и реальными скоростями точек системы.)

Почему мы подчёркиваем локальность во всех свойствах обобщённых координат? Дело в том, что во многих случаях одной системы координат недостаточно для описания всего конфигурационного пространства.

Даже для точки на поверхности сферы мы не можем ввести одну систему координат, которая удовлетворяла бы перечисленным свойствам во всех точках. Если поверхность сферы описывать с помощью сферических углов (или широты и долготы), то получатся две особые точки — полюсы. Отсутствие взаимной однозначности (при сдвиге долготы на полный оборот или при переходе широты через полюс) в этом примере не так важно, так как локально (кроме полюсов) взаимная однозначность есть: достаточно малая область сферы, не затрагивающая особые точки, может быть описана обобщёнными координатами взаимно однозначно. Более неприятно, что в особых точках (на полюсах) нет локальных базисов, связанных со сферическими координатами, *нет набора линейно независимых касательных к направлениям, соответствующим изменениям отдельных координат*: одни координатные линии (меридианы) пересекаются, а другие (параллели) — стягиваются в точку.

Почему нам достаточно координат, которые хороши только локально? Это связано с тем, что механика описывается дифференциальными уравнениями, которые связывают между собой некоторые функции и их производные в одной точке конфигурационного пространства. А для вычисления производных достаточно задать функцию в сколь угодно малой окрестности точки.

Если у нас уже есть набор обобщённых невырожденных координат x^M (координаты мы будем, как правило, нумеровать верхними индексами) и мы задаём новые обобщённые координаты¹ $x^{M'}$ как функции от x^M , то условие невырожденности новых координат можно выразить через матрицу частных производных, которая называ-

¹ Обратите внимание: чтобы отличить старые (нештрихованные) координаты от новых (штрихованных), мы ставим штрих не на сами координаты, а на индексы. Мы считаем, что нештрихованный индекс пробегает нештрихованные значения $M \in \{1, 2, \dots, D\}$, а штрихованный индекс пробегает штрихованные значения $M' \in \{1', 2', \dots, D'\}$.

ется матрицей Якоби:

$$\frac{\partial x^{M'}}{\partial x^M}.$$

Все элементы матрицы Якоби должны быть определены, а её определитель (якобиан) должен быть отличен от нуля:

$$\det\left(\frac{\partial x^{M'}}{\partial x^M}\right) = \frac{Dx'}{Dx} \neq 0.$$

Геометрический смысл определителя матрицы $D \times D$ — отношение объёма D -мерного параллелепипеда, натянутого на векторы, компоненты которых заданы столбцами (или строками) матрицы, к объёму D -мерного параллелепипеда, натянутого на базисные векторы. Если столбцы матрицы линейно зависимы, то параллелепипед оказывается расплюснутым и имеет нулевой объём.

Геометрический смысл якобиана $\frac{Dx'}{Dx}$ — отношение элементов D -объёма $d^D x'$ и $d^D x$. Такое отношение будет также полезно при замене переменных в D -мерном интеграле:

$$\int f(x(x')) d^D x' = \int f(x) \frac{Dx'}{Dx} d^D x.$$

1.1.4.3. Геометрический смысл определителя* (л)

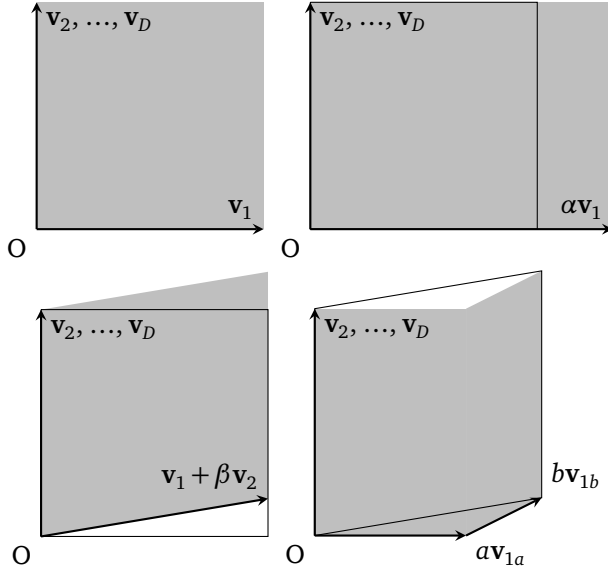
Выведем общую формулу для определителя из его геометрического смысла.

Рассмотрим параллелепипед, натянутый на векторы $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_D$. Зафиксируем все векторы, кроме $\mathbf{v}_1$. Мы видим (см. рисунки), что если вектор $\mathbf{v}_1$ умножить на положительное число α , то объём умножится на то же число. Если вектор $\mathbf{v}_1$ умножить на отрицательное число α , то объём умножится на $|\alpha|$, но давайте считать, что это *ориентированный объём*, который может быть отрицательным. Тогда для ориентированного объёма мы примем по определению, что при изменении знака $\mathbf{v}_1$ также меняется знак объёма.

Если к $\mathbf{v}_1$ добавить линейную комбинацию векторов $\mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_D$, то параллелепипед перекосится, но D -объём не изменится.

Комбинируя эти свойства, мы видим, что *ориентированный объём* линеен по вектору $\mathbf{v}_1$: если $\mathbf{v}_1 = \alpha \mathbf{v}_{1a} + b \mathbf{v}_{1b}$, то ориентированный объём $M(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_D)$ для параллелепипеда, натянутого на векторы, имеет вид

$$M(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_D) = \alpha M(\mathbf{v}_{1a}, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_D) + b M(\mathbf{v}_{1b}, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_D).$$



Аналогично мы можем заключить, что ориентированный объём линеен по каждому из D векторов $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_D$.

Вектор $\mathbf{v}_k$ мы можем разложить по базисным векторам $\mathbf{e}_m$ ($m = 1, \dots, D$):

$$\mathbf{v}_k = \sum_{m=1}^D v_k^m \mathbf{e}_m.$$

С учётом линейности ориентированного объёма мы можем теперь записать

$$\begin{aligned} M(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_D) &= \sum_{m_1} v_1^{m_1} M(\mathbf{e}_{m_1}, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_D) = \dots \\ &= \sum_{m_1, \dots, m_D} v_1^{m_1} v_2^{m_2} \dots v_D^{m_D} M(\mathbf{e}_{m_1}, \mathbf{e}_{m_2}, \dots, \mathbf{e}_{m_D}). \end{aligned}$$

Таким образом, мы свели вычисление ориентированного объёма произвольного параллелепипеда к вычислению ориентированных объёмов, натянутых на всевозможные наборы базисных векторов.

В получившейся сумме отличны от нуля только те объёмы $M(\mathbf{e}_{m_1}, \mathbf{e}_{m_2}, \dots, \mathbf{e}_{m_D})$, для которых все векторы $\mathbf{e}_{m_1}, \mathbf{e}_{m_2}, \dots, \mathbf{e}_{m_D}$ различны. Поскольку у M имеется D векторных аргументов и число разных базисных векторов $\mathbf{e}_k$ тоже равно D , получается, что ненулевой вклад дают только те слагаемые, для которых индексы $m_1, m_2, \dots, m_D$ образуют некоторую перестановку индексов $1, 2, \dots, D$.

Примем в качестве единицы измерения объём, натянутый на базисные векторы:

$$M(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_D) = 1.$$

Параллелепипед, натянутый на те же базисные векторы, которые перечислены в другом порядке, — это тот же самый параллелепипед, так что и объём у него должен быть тот же самый. Но мы вычисляем ориентированный объём, так что возможно, что некоторые объёмы будут отличаться знаком:

$$M(\mathbf{e}_{m_1}, \mathbf{e}_{m_2}, \dots, \mathbf{e}_{m_D}) = \pm 1, \quad \{m_1, m_2, \dots, m_D\} = \{1, 2, \dots, D\}. \quad (1.1.3)$$

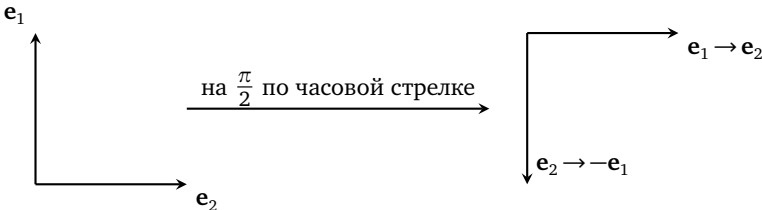
Из линейности мы получаем

$$M(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_D) = 1 \Rightarrow M(-\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_D) = -1.$$

Если мы будем непрерывно менять наш набор векторов, то для того, чтобы объём изменился от $+1$ до -1 , в некоторой промежуточной конфигурации он должен обратиться в нуль.

Оказывается, мы можем любой набор линейно независимых векторов непрерывно преобразовать так, что ни в какой промежуточной конфигурации объём не обратится в нуль, либо к набору $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_D$ (правый базис), либо к набору $-\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_D$ (левый базис), в частности, следующее преобразование осуществляется как поворот в плоскости, натянутой на векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, на угол $\frac{\pi}{2}$:

$$\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_D \rightarrow -\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_D.$$



Отсюда легко видеть, что знак в формуле (1.1.3) определяется чётностью перестановки $m_1, m_2, \dots, m_D$, т.е. чётностью числа парных перестановок индексов, которые позволяют расставить индексы $m_1, m_2, \dots, m_D$ в порядке возрастания $1, 2, \dots, D$.

Определим полностью антисимметричный символ *Леви-Чивиты*:

$$\varepsilon_{m_1 m_2 \dots m_D} = M(\mathbf{e}_{m_1}, \mathbf{e}_{m_2}, \dots, \mathbf{e}_{m_D}) = \begin{cases} 0, & \text{есть повторяющиеся индексы,} \\ +1, & \text{индексы дают чётную перестановку } 1, 2, \dots, D, \\ -1, & \text{индексы дают нечётную перестановку } 1, 2, \dots, D. \end{cases} \quad (1.1.4)$$

Теперь мы можем записать формулу для полного разложения определителя матрицы $D \times D$:

$$\det A = \sum_{m_1 m_2 \dots m_D} \varepsilon_{m_1 m_2 \dots m_D} A_{1m_1} A_{2m_2} \dots A_{Dm_D}. \quad (1.1.5)$$

В нашем 3-мерном пространстве принято считать, что ориентация правого базиса соответствует ориентации первых трёх пальцев правой руки (*правило правой руки*), если направить их взаимно перпендикулярно (см. рисунок): большой палец — ось x , указательный палец — ось y , средний палец — ось z .



Символ Леви-Чивиты в 3-мерном пространстве имеет следующие ненулевые компоненты:

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = +1, \quad \varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{132} = -1.$$

В трёхмерном пространстве символ Леви-Чивиты можно представить как трёхмерную матрицу:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Здесь первый индекс нумерует слои (в порядке удаления), второй — строки, третий — столбцы.

§ 1.1.5. Задачи 1–3

Чтобы полноценно усвоить материал курса и уметь им пользоваться, необходимо самому прорешать ряд задач, иллюстрирующих основные идеи и методы. В конце большинства глав вы найдёте соответствующие задачи.

Проиллюстрируем удобство закона Ньютона 2а для тел с переменной массой.

Задача 1 (Задача Циолковского). Используя определение силы $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}$, получите зависимость скорости ракеты в пустоте от начальной массы M_0 , конечной массы M и скорости истечения u .

Следующие две задачи вы можете попробовать решить сейчас или, если не получится, вернуться к ним после того, как в главе 1.3 мы познакомимся с лагранжевым формализмом более последовательно.

Задача 2 (От действия к системе). Проварьируйте действия, запишите уравнения движения, обобщённые импульсы, обобщённые силы, энергию. Опишите словами и проиллюстрируйте графиками, какой системе может соответствовать такое действие:

а) $S[x(t)] = \int \left(\frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} - \frac{Cx^4}{4} \right) dt \quad (m, k, C = \text{const});$

б) $S[x(t)] = \int \left(\frac{m(\dot{x} - u)^2}{2} + Fx \right) dt \quad (m, u, F = \text{const});$

в) $S[x(t)] = \int \left(\frac{m\dot{x}^2}{2} + \dot{x}A(x, t) \right) dt \quad (m = \text{const}, \text{ функция } A(x, t) \text{ — одномерный векторный потенциал});$

г) $S[x(t)] = \int \left(-\frac{m\dot{x}\ddot{x}}{2} + B \cos(kx) \right) dt \quad (m, B, k = \text{const});$

д) $S[\mathbf{r}(t)] = \int \left(\frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2} + \frac{kr^2}{2} - \frac{Cr^4}{4} \right) dt \quad (m, k, C = \text{const}), \text{ сравните с п. а).}$

Задача 3 (От системы к действию). Перечислите степени свободы, запишите действие, проварьируйте, запишите уравнения движения, обобщённые импульсы, обобщённые силы, энергию.

а) Грузик массой m на пружинке с жёсткостью k .

¹ Здесь $\mathbf{F}$ — полная сила, учитывающая как внешнюю силу $\mathbf{F}_{\text{внеш.}}$, так и изменение импульса за счёт уносимой/приносимой массы. Часто эти вклады разделяют и получают *формулу Мещерского*

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}_{\text{внеш.}} + \mathbf{V}_{\text{приток}} \frac{dm_{\text{приток}}}{dt} - \mathbf{V}_{\text{отток}} \frac{dm_{\text{отток}}}{dt},$$

где $\mathbf{p} = M\mathbf{V}$ — скорость тела, $\mathbf{V}_{\text{приток/отток}}$ — скорость присоединяющихся/отделяющихся частиц, а $\frac{dm_{\text{приток/отток}}}{dt}$ — масса частиц, присоединяющихся/отделяющихся в единицу времени.

В классической механике $\mathbf{F}_{\text{внеш.}}$ не меняется при переходе в инерциальную систему отсчёта, движущуюся относительно исходной, тогда как полная сила $\mathbf{F}$ для тела с переменной массой зависит от скорости системы отсчёта.

б) Крутильные весы (*крутильный маятник*) с моментом инерции I и жёсткостью кручения k . Сравнив с п. а), определите период колебаний.

в) Математический маятник массой m , длиной R , ускорение свободного падения — g . Сравните с п. а).

г) Физический маятник с массой m , моментом инерции I , расстояние от точки подвеса до центра масс — R , ускорение свободного падения — g . Сравнив с п. в), определите период колебаний.

д) Колесо радиусом R и массой m с моментом инерции I катится с наклонной плоскости с углом наклона α в гравитационном поле g без проскальзывания.

е) То же, что в п. д), но плоскость без трения.

ж)* Молекула водорода H_2 . Параметры задачи подберите сами.

§ 1.1.6. Ответы к задачам 1, 2

Решения задач с необходимыми комментариями приводятся в разделе «Решения и дополнения», а здесь приводятся только ответы.

1 (Задача Циолковского). $V(t) - V_0 = u \ln\left(\frac{m_0}{m}\right)$.

2 (От действия к системе).

а) $-m\ddot{x} + kx - Cx^3 = 0$, $p = m\dot{x}$, $f = kx - Cx^3$, $\mathcal{E} = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} + \frac{Cx^4}{4}$.

в) $-m\ddot{x} - \frac{\partial A}{\partial t} = 0$, $p = m\dot{x} + A(x, t)$, $f = \dot{x} \frac{\partial A}{\partial x}$, $\mathcal{E} = \frac{m\dot{x}^2}{2}$.

Обратите внимание на то, что введение векторного потенциала не изменило энергию системы, но изменило выражение для импульса. Кроме того, обобщённая сила не совпадает с обычной силой $-\frac{\partial A}{\partial t}$, которая входит в уравнение движения.

г)* $-m\ddot{x} - Bk \sin(kx) = 0$, $p = m\dot{x}$, $f = -Bk \sin(kx)$, $\mathcal{E} = \frac{m\dot{x}^2}{2} - B \cos(kx)$.

Лагранжиан в этом пункте содержит высшую (вторую) производную по времени, однако, проинтегрировав действие по частям и откинув граничный член (он не влияет на уравнение движения), можно получить лагранжиан, зависящий только от x и $\dot{x}$. Именно этот лагранжиан надо использовать для получения обобщённых импульса, силы и энергии, которые выводились в предположении отсутствия в лагранжиане высших производных по времени.

д) $-m\ddot{\mathbf{r}} + k\mathbf{r} - Cr^2\mathbf{r} = 0$, $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}}$, $\mathbf{f} = k\mathbf{r} - Cr^2\mathbf{r}$, $\mathcal{E} = \frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2} - \frac{kr^2}{2} + \frac{Cr^4}{4}$.

Удобно работать не с отдельными обобщёнными координатами (компонентами вектора $\mathbf{r}$), а целиком с $\mathbf{r}$ как с векторной переменной. При этом надо различать $\mathbf{r}$ и $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{\mathbf{r}^2}$. Обратите внимание на то, что выражение $\mathbf{r}^3$ не имело бы смысла, поэтому мы пишем $r^2\mathbf{r}$.