Предисловие

Задачи на придумывание конструкций часто ставят в тупик школьников, привыкших, что в математике «всё задаётся однозначно». Но фантазия — такая же неотъемлемая часть математики, как строгость и логичность. И задачи на конструкцию учат применять фантазию в соединении со строгостью и логичностью. В предыдущей книге автора «Как построить пример?» (см. [2]) разобраны наиболее простые приёмы решения задач на конструкцию: «Как такое может быть?!», «Ищи там, где легче», «Высматривай знакомое», «Используй повторяемость», «Используй симметрию». Данная книга расширяет этот список, вводя приёмы посложнее и помощнее.

Для решения большинства задач этой книги (и понимания приведённых в книге решений) не требуется знаний, выходящих за рамки школьных программ 6 класса. Тем не менее значительная часть решений требует определённой математической культуры, которую вряд ли можно ожидать на первом году занятий математического кружка. Поэтому автор считает, что книга будет полезна для школьников 6–8 и более старших классов, уже имеющих опыт обучения в математических кружках.

Книга содержит семь тематических занятий математического кружка. В материалы каждого занятия входят: вступительный текст учителя, подробный разбор нескольких задач по теме занятия (включающий решения и комментарии), задачи для самостоятельного решения, решения этих задач с комментариями — всего примерно 10 задач на занятие. В конце некоторых занятий добавлен текст, озаглавленный «Идеология»: мысли и советы, позволяющие расширить и углубить контекст занятия. Первые три занятия ориентированы на учеников 6–7 классов, следующие три — для 7–8 классов, последнее — для 8–9 классов. Есть ещё раздел «Дополнительные задачи», и там, среди прочего, есть задачи и для школьников постарше: 134 задачи на конструкции сгруппированы по классам: 6–7, 7–8, 8–9 и 9–11; наиболее сложные отмечены звёздочкой *. Такая подборка даёт руководителю кружка возможность адаптировать занятие к возрасту и уровню подготовки школьников за счёт замены некоторых основных задач дополнительными. С этой целью в конце каждого занятия приводятся списки задач из дополнительного раздела, а также из других занятий; задачи списка могут быть решены с использованием методов текущего занятия. Впрочем, большинство задач можно решить разными методами, поэтому одна и та же задача может фигурировать в нескольких списках.

В конце книги приведён раздаточный материал.

Текст брошюры рассчитан более на учителя, чем на школьника. Нормальный школьник предпочитает решать без подробной записи и обсуждать решения устно. Готовность читать рассуждения на тему «Как можно найти решение» приходит только с накоплением опыта. Чтобы комментарии и общие идеи книги всё же доходили до ученика, учителю стоит включать почерпнутые в этой брошюре идеи в обсуждения.

Решения задач и *пути к решению* тщательно разделены. Этим автор хотел подчеркнуть, что в задачах на конструкцию готовое решение (то, что школьник в идеале должен написать) и путь к решению (пояснение, как такое придумать) обычно имеют мало общего[1]. Соответ-

[1]Собственно, и в задачах на доказательство мало общего между решением и поиском решения. Но там элементы пути к решению оставляют в тексте решения или вкрапляют в него из педагогических соображений: без них понять текст будет намного труднее. В результате,

ственно, и школьников полезно учить разделять эти моменты. Тем более что такое разделение может пригодиться и при решении математических задач других типов.

Первые пять задач каждого занятия — это примеры для коллективного обсуждения. Сложность их различна: первые обычно — одноходовки, а последние одну-две задачи редко кто из школьников успевает решить. Но даже если школьникам самим не удаётся быстро найти *нужное* решение, стоит его подсказать, в любом случае — разобрать на доске и показать на его примере работу *приёмов*.

Задачи для самостоятельного решения учителю стоит обсуждать индивидуально со школьниками, так или иначе продвинувшимися в их решении.

Соглашение о формулировках. Если в условии требуется *построить*, *разрезать*, *расставить*, то поиск *всех возможных вариантов не требуется* (а если он нужен, это специально оговаривается).

Автор благодарен К. А. Кнопу за содержательные обсуждения и предложенные задачи, позволившие существенно улучшить данную книгу.

увы, затушёвывается характерное для всякой математической деятельности различие между строгой логикой готового результата и креативной логикой восхождения к решению.

Введение

Автор убеждён, что построение и исследование конструкций составляет существенную часть *математики*, а значит, это должно составлять существенную часть *обучения математике*. Такое обучение позволяет решить две задачи: поддерживать достаточно долго интерес к математике и повысить эффективность обучения.

Проблема интереса упирается в абстрактный характер математики. Именно абстрактность со временем начинает вызывать отторжение даже у очень сильных и успешных учеников. Традиционное «академичное» преподавание создаёт несоответствие между богатством математических формул, теорем и методов и бедностью их приложений за пределами математики. Неудивительно, что многим ученикам и студентам математика начинает казаться чем-то вроде «игры в бисер», и относиться к ней они начинают соответственно.

Не надо забывать, что вся математика возникла из практического опыта, как его развитие. Да, связи «житейского» и «математического» далеко не так просты, но они никуда не делись. А главное: знаний об окружающем мире у школьников в миллиарды раз больше, чем математических! И отказываться от этих знаний — всё равно что отказываться дышать воздухом атмосферы и переходить на дыхание из кислородного баллона.

Но хотя, на взгляд автора, и окружающая действительность, и смежные дисциплины пронизаны математикой, он понимает, что в рамках урока даже межпредметные связи навести весьма непросто. И тут на помощь приходят задачи на конструкции. Их тематика весьма разнообразна и может быть легко привязана к интересам учащихся, а постановки задач «построить», «возможно ли», «какое наименьшее количество нужно, чтобы» и т. п. выглядят куда более мотивированными. В то же время инструментарием для исследования конструкций служат всё те же «абстрактные и теоретические» теоремы и методы, которые мы и хотим преподать учащимся.

Проблема эффективности обучения — это проблема применения полученных знаний и навыков. Рядовой учитель посвящает основное время обучению математическим формулам, понятиям и теоремам и отработке навыков работы с ними. О применении этих теорем за пределами ограниченного списка задач речь обычно не идёт. Но ведь это как если бы строителей учили обработке кирпичей и досок, но не учили строить дома!

В результате навыки и понятия зачастую оказываются усвоенными поверхностно. Они оторваны от здравого смысла и редко применяются за пределами профессиональной деятельности, да и в такой деятельности применение сведено к нескольким стандартным схемам. Стоит ли после этого удивляться феномену кандидатов физико-математических и технических наук, не способных решить задачу 19 ЕГЭ профильного уровня только потому, что конструкция этой задачи им раньше не встречалась.

Между тем в практической деятельности задача сконструировать что-то, сварить обед, составить маршрут или план и т. п. встречается гораздо чаще, чем что-то пересчитать, решить уравнение или доказать. Сплошь и рядом нам приходится сталкиваться с какими-то практическими ситуациями впервые в жизни, и ничего — справляемся. Вот это-то умение можно и нужно использовать и при обучении математике. И хорошим средством служат именно задачи на конструкцию.

Кроме того, в процессе придумывания действует не столько математическая логика, сколько фантазия. И ограничивать её «пятачком» математического опыта неразумно. Черпать идеи можно и нужно не только из слов учителя или книг, но и непосредственно из окружающего мира. В конце концов, лишь сотые доли процента школьников станут профессиональными «чистыми» математиками. Остальным если уж придётся применять свои знания и навыки, то в прикладной математике, программировании, других науках и вне науки. Так давайте учить их так, чтобы им эти навыки пригодились в любом случае.

В частности, будем учить их придумывать примеры так, чтобы изобретательность как минимум сохранялась, а строгость ей не только не мешала, но чем дальше, тем больше помогала. Автор старался классифицировать приёмы придумывания конструкций и показать, что они коренятся в житейском опыте. В решениях продемонстрировано, что классические кружковые темы «Чётность», «Принцип Дирихле», «От противного», «Решение с конца», «Делимость», «Остатки», «Инвариант» и «Полуинвариант» работают при построении явных примеров с тем же успехом, что и при доказательстве невозможности или неконструктивном доказательстве существования.

Простейшие приёмы придумывания конструкций были разобраны в книге автора «Как построить пример?». О них полезно помнить и при решении задач данной книги. Коротко напомним их.

Как такое может быть? Спросите себя: «Какими свойствами должна обладать конструкция?» Дополнительное знание может сильно сузить круг поисков или осветить дорогу.

Ищи, где удобнее. Если хватает одного примера, ищи сначала там, где удобнее. Используй здравый смысл, естественные соображения. Это ограничивает число вариантов, зато ускоряет поиск.

Высматривай знакомое. Ответом может оказаться хорошо знакомый объект, просто надо посмотреть на него под нужным углом.

Повторяемость. Если конструкция должна состоять из большого числа деталей, проще использовать одинаковые детали. Разные детали можно объединять в одинаковые блоки и строить из блоков.

Симметрии, сдвиги и повороты. Равные части удобнее получать симметрией, сдвигом или поворотом. При работе с симметричными фигурами и позициями сто́ит сначала поискать симметричное решение. Даже и вне геометрии может сработать расстановка объектов по кругу так, чтобы поворот переводил конструкцию в себя.

В путях к решению эти приёмы будут упоминаться наряду с теми, которые рассмотрены в занятиях данной книги.