

Оглавление

Предисловие	9
-----------------------	---

ЧАСТЬ I. Непрерывные процессы и дифференциальные уравнения

Глава I. Эволюционные модели	13
§ 1.1. Дифференциальные уравнения и эволюционные модели . . .	13
1.1.1. Смысл производной: скорость изменения величины . .	13
1.1.2. Касательная и геометрический смысл производной . .	15
1.1.3. Понятие линейного приближения	16
1.1.4. Движение по прямой	19
1.1.5. Одномерные эволюционные модели	20
1.1.6. Производные и скорости в механике (кинематике) . .	23
1.1.7. Геометрический (кинематический) смысл вектора скорости	25
1.1.8. Двумерная эволюционная модель Вольтерры—Лотки .	28
§ 1.2. Представление о динамических системах	30
1.2.1. Система уравнений Ньютона. Фазовая плоскость . .	31
1.2.2. Равноускоренное движение и свободное падение	32
1.2.3. Двумерная динамическая система (пример)	35
1.2.4. Консервативные одномерные системы. Модель «шарик в желобе»	38
1.2.5. Пример консервативной системы: шарик на пружинке	41
Упражнения, задачи и задания к гл. I	43
Глава II. Интегральное исчисление	52
§ 2.1. Анализ дифференциального уравнения $y' = f(x)$	52
2.1.1. Интегрирование как решение дифференциального уравнения	52
2.1.2. Теорема единственности решений уравнения $y' = f(x)$ и свойства первообразных	55
2.1.3. Вопросы существования решений уравнения $y' = f(x)$, или первообразных	56

§ 2.2. Геометрическая интерпретация уравнения $y' = F(x, y)$	58
2.2.1. Поля направлений и интегральные кривые дифференциальных уравнений	58
2.2.2. Метод Эйлера для построения интегральных кривых	59
2.2.3. Изоклины полей направлений и графическое интегрирование дифференциальных уравнений	60
§ 2.3. Ломаные Эйлера, решения уравнения $y' = f(x)$ и интеграл	65
2.3.1. Ломаные Эйлера и интегральные суммы	65
2.3.2. Интегральные суммы и квадратуры (площади)	67
2.3.3. Основная теорема анализа: производная переменной площади	68
2.3.4. Теоремы существования решений уравнения $y' = f(x)$ и первообразных	70
2.3.5. Площади криволинейных трапеций как приращения первообразных	71
2.3.6. Интегральные суммы и интеграл	73
§ 2.4. Геометрические приложения интеграла	76
2.4.1. Основная идея: применение формулы Барроу	76
2.4.2. Площади плоских фигур	77
2.4.3. Объем общего прямого цилиндра	80
2.4.4. Интегральная формула для объемов (интеграл площадей сечений)	81
2.4.5. Объем общего конуса	82
2.4.6. Объем тела вращения	84
2.4.7. Объем шара	85
2.4.8. Замечание о площади сферы	85
2.4.9. Геометрические меры и интегральные суммы. Принцип Кавальери	86
Упражнения, задачи и задания к гл. II	89
Глава III. Экспонента и дифференциальные уравнения	115
§ 3.1. Линейные процессы и дифференциальное уравнение $y' = ky$	115
3.1.1. Пример: рост популяций	116
3.1.2. Пример: радиоактивный распад	116
3.1.3. Пример: вязкое трение	117
3.1.4. Анализ дифференциального уравнения $y'(x) = ky(x)$: подход Эйлера	118
3.1.5. Анализ уравнения $y'(x) = ky(x)$: подход Ньютона	120
3.1.6. Анализ уравнения $y'(x) = ky(x)$: разностный аналог	121
§ 3.2. Натуральный логарифм и экспонента	122
3.2.1. «Симметричное» дифференциальное уравнение	123

3.2.2.	Натуральный логарифм	124
3.2.3.	Натуральная экспонента	126
3.2.4.	Экспонента и показательная функция	128
3.2.5.	Решения дифференциального уравнения $y' = ky$	130
§ 3.3.	Экспоненциальный рост и теоремы о сравнении	132
3.3.1.	Ньютоновы «экспоненциальные» многочлены	132
3.3.2.	Как отличить экспоненциальный рост от степенного?	133
3.3.3.	Что такое экспоненциальный рост на бесконечности?	135
3.3.4.	Сравнение степенной и логарифмической функций при $x \rightarrow +\infty$	137
3.3.5.	Сравнение степенной и логарифмической функций при $x \rightarrow 0+$	138
§ 3.4.	Экспоненциальные модели	139
3.4.1.	Пример: радиоактивный распад	139
3.4.2.	Пример: ядерное деление (цепная реакция)	140
3.4.3.	Неоднородное линейное дифференциальное уравнение $y' = ky + f(x)$	144
3.4.4.	Неоднородное линейное дифференциальное уравнение $y' = ky + b$ (const)	145
3.4.5.	Пример: уравнение «атомного реактора»	147
§ 3.5.	Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами	148
3.5.1.	Метод Лагранжа: вариация произвольной постоянной	149
3.5.2.	Пример: свободное движение с трением	151
3.5.3.	Пример: свободное падение с трением	153
3.5.4.	Однородные линейные уравнения с переменными коэффициентами: $y' = k(x)y$	157
3.5.5.	Общие линейные уравнения с переменными коэффициентами: $y' = k(x)y + f(x)$	159
Упражнения, задачи и задания к гл. III		161
Глава IV. Модели с разделяющимися переменными		173
§ 4.1.	Анализ эволюционного уравнения $y' = g(y)$. Примеры	173
4.1.1.	Поля направлений уравнения $y' = g(y)$ и симметричные им	173
4.1.2.	Примеры: линейные уравнения $y' = ky + b$	175
4.1.3.	Теоремы о решениях уравнения $y' = g(y)$. Стационарные решения	176
4.1.4.	Автономные уравнения как модели эволюции (напоминание)	180
4.1.5.	Пример: уравнение взрыва $y' = \alpha y^2$	181

4.1.6. Пример: логистическое уравнение $y' = y(a - y)$	183
4.1.7. Пример неединственности решений уравнения $y' = g(y)$	187
§ 4.2. Формализм Лейбница и уравнения с разделяющимися переменными	190
4.2.1. Формальное интегрирование уравнения $y' = g(y)$. . .	191
4.2.2. Разделение переменных и формализм Лейбница	194
4.2.3. Теоремы об уравнениях с разделяющимися переменными	198
4.2.4. Особые точки дифференциальных уравнений	201
4.2.5. Разделение переменных в линейных уравнениях вида $y' = k(x)y [+ f(x)]$	202
§ 4.3. Дифференциальные уравнения на плоскости	204
4.3.1. Уравнения на плоскости, векторные поля, фазовые портреты	204
4.3.2. Фазовые портреты и особые точки: «узлы» и «седла»	207
4.3.3. Дальнейшие примеры: еще «седла» и «центры»	212
§ 4.4. Интегрируемые системы. Модель биоценоза «хищник-жертва»	216
4.4.1. Формализм Лейбница для систем на плоскости	216
4.4.2. Теорема о решениях: обоснование формализма Лейбница	217
4.4.3. Схема Лейбница отыскания решений систем на плоскости	219
4.4.4. Разделение переменных в системах на плоскости . . .	221
4.4.5. Качественный анализ модели Вольтерры—Лотки . . .	222
4.4.6. Интегрирование системы Вольтерры—Лотки	223
Упражнения, задачи и задания к гл. IV	226

ЧАСТЬ II. Динамические системы

Глава V. Дифференциальное уравнение Ньютона	237
§ 5.1. Закон сохранения энергии	237
5.1.1. Энергия как первый интеграл одномерной системы Ньютона	238
5.1.2. Работа переменной силы	239
5.1.3. Потенциальная энергия одномерного силового поля . .	240
5.1.4. Закон сохранения полной механической энергии . . .	244
5.1.5. История дифференциальных уравнений	245
§ 5.2. Фазовые портреты и интегрирование уравнения Ньютона . .	254
5.2.1. Фазовые траектории и линии уровня энергии на фазовой плоскости	254

5.2.2.	Скорость убегания и вторая космическая скорость . . .	257
5.2.3.	Схема интегрирования уравнения Ньютона	259
5.2.4.	Обоснование схемы интегрирования уравнения Ньютона	263
5.2.5.	О разрешимости и свойствах решений уравнения Ньютона	264
5.2.6.	Наглядная интерпретация одномерных консервативных систем	266
§ 5.3.	Дифференциальное уравнение гармонических колебаний	
	$x'' = -\omega^2 x$	267
5.3.1.	Математический маятник: малые колебания	267
5.3.2.	Фазовый портрет гармонического осциллятора	268
5.3.3.	Решения уравнения гармонических колебаний. Теорема единственности	269
5.3.4.	Следствия из теоремы единственности: свойства косинуса и синуса	271
5.3.5.	Дальнейшие следствия: формула вспомогательного аргумента	273
5.3.6.	Канонический вид и параметры гармонических колебаний	275
5.3.7.	Интегрирование дифференциального уравнения гармонических колебаний	276
§ 5.4.	Сложение гармонических колебаний	278
5.4.1.	Теорема о сложении гармонических колебаний	278
5.4.2.	Векторные диаграммы гармонических колебаний	279
5.4.3.	Пример: трехфазная система токов	280
5.4.4.	Амплитуда суммы гармонических колебаний	282
§ 5.5.	Вынужденные колебания, резонанс и биения	283
5.5.1.	Уравнение вынужденных колебаний и его решения	283
5.5.2.	Анализ решений: резонанс и дрожание	284
5.5.3.	Анализ решений: резонансное раскачивание и биения	285
5.5.4.	Точный резонанс	287
§ 5.6.	Анализ уравнения $x'' = \lambda^2 x$. Гиперболические функции	288
5.6.1.	Решения уравнения $x'' = \lambda^2 x$. Теорема единственности	288
5.6.2.	Второе доказательство теоремы единственности	290
5.6.3.	Уравнение гиперболических косинуса и синуса	290
5.6.4.	Неустойчивые положения равновесия	294
5.6.5.	Фазовый портрет уравнения $x'' = \lambda^2 x$. Качественное описание	296
5.6.6.	Движение по фазовым траекториям	298
5.6.7.	Интегрирование уравнения $x'' = \lambda^2 x$	300

5.6.8. Интегрирование дифференциального уравнения математического маятника	302
§ 5.7. Анализ уравнения $x'' + px' + qx = 0$	305
5.7.1. Общее уравнение второго порядка. Достижения Эйлера	305
5.7.2. Характеристическое уравнение	307
5.7.3. Случай положительного дискриминанта	307
5.7.4. Случай нулевого дискриминанта	309
5.7.5. Случай отрицательного дискриминанта	311
§ 5.8. Колебания в упруго-вязкой среде	312
5.8.1. Уравнение колебаний в упруго-вязкой среде	312
5.8.2. Случай сильного трения: аperiodическое затухание .	313
5.8.3. Промежуточный случай: тоже аperiodическое затухание	313
5.8.4. Случай малого трения: затухающие колебания	314
5.8.5. Случай малого трения: формальный подход	317
5.8.6. Уравнение вынужденных колебаний с трением: общий вид и поведение решений	318
5.8.7. Частное решение уравнения вынужденных колебаний с трением	318
5.8.8. Анализ частного решения	320
Упражнения, задачи и задания к гл. V	321

Глава VI. Волновое уравнение и колебания 345

§ 6.1. Бегущие волны и волновое уравнение	345
6.1.1. Одномерные волны и гармонические колебания	345
6.1.2. Интерференция одномерных волн	346
6.1.3. Интерференция двумерных волн	348
6.1.4. Волновое уравнение	349
§ 6.2. Колебания струны. Музыкальная акустика	350
6.2.1. Уравнение упругой струны	350
6.2.2. Струна с закрепленным концом: отражение и интерференция волн	352
6.2.3. Струна с закрепленными концами: спектр собственных частот	353
6.2.4. Несколько слов о музыкальной акустике	354
Упражнения, задачи и задания к гл. VI	356