

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	7
-----------------------	---

ГЛАВА 1

ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВЫЕ КОНСТРУКЦИИ

§ 1. Классические группы малых размерностей	9
1. Общие определения (9). 2. Параметризация групп $SU(2)$, $SO(3)$ (10). 3. Эпиморфизм $SU(2) \rightarrow SO(3)$ (12). 4. Геометрическое изображение группы $SO(3)$ (14). 5. Кватернионы (14). Упражнения (18).	
§ 2. Смежные классы по подгруппе	19
1. Элементарные свойства (19). 2. Строение циклических групп (22). Упражнения (23).	
§ 3. Действие групп на множествах	23
1. Гомоморфизмы $G \rightarrow S(\Omega)$ (23). 2. Орбиты и стационарные подгруппы точек (24). 3. Примеры действий групп на множествах (26). 4. Однородные пространства (30). Упражнения (31).	
§ 4. Факторгруппы и гомоморфизмы	32
1. Понятие о факторгруппе (32). 2. Теоремы о гомоморфизмах групп (33). 3. Коммутант (37). 4. Произведения групп (39). 5. Образующие и определяющие соотношения (41). Упражнения (45).	

ГЛАВА 2

СТРОЕНИЕ ГРУПП

§ 1. Разрешимые и простые группы	48
1. Разрешимые группы (48). 2. Простые группы (50). Упражнения (54).	
§ 2. Теоремы Силова	54
Упражнения (59).	
§ 3. Конечно порождённые абелевы группы	60
1. Примеры и предварительные результаты (60). 2. Абелевы группы без кручения (61). 3. Свободные абелевы группы конечного ранга (64). 4. Строение конечно порождённых абелевых групп (66). 5. Другие подходы к проблеме классификации (67). 6. Основная теорема о конечных абелевых группах (71). Упражнения (74).	

§ 4. Линейные группы Ли	74
1. Определения и примеры (74). 2. Кривые в матричных группах (76). 3. Дифференциал гомоморфизма (78). 4. Алгебра Ли группы Ли (79). 5. Логарифм (81). Упражнения (82).	

ГЛАВА 3

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

§ 1. Определения и примеры линейных представлений	86
1. Основные понятия (86). 2. Примеры линейных представлений (91). Упражнения (95).	
§ 2. Унитарность и приводимость	96
1. Унитарные представления (96). 2. Полная приводимость (99). Упражнения (102).	
§ 3. Конечные группы вращений	102
1. Порядки конечных подгрупп в $SO(3)$ (103). 2. Группы правильных многогранников (105). Упражнения (108).	
§ 4. Характеры линейных представлений	109
1. Лемма Шура и её следствие (109). 2. Характеры представлений (111). Упражнения (116).	
§ 5. Неприводимые представления конечных групп	117
1. Число неприводимых представлений (117). 2. Степени неприводимых представлений (119). 3. Представления абелевых групп (121). 4. Представления некоторых специальных групп (123). Упражнения (125).	
§ 6. Представления групп $SU(2)$ и $SO(3)$	127
Упражнения (130).	
§ 7. Тензорное произведение представлений	131
1. Контрагredientное представление (131). 2. Тензорное произведение представлений (132). 3. Кольцо характеров (133). 4. Инварианты линейных групп (136). Упражнения (140).	

ГЛАВА 4

КОЛЬЦА И МОДУЛИ

§ 1. Теоретико-кольцевые конструкции	142
1. Идеалы колец и факторкольца (142). 2. Поле разложения многочлена (144). 3. Теоремы об изоморфизме колец (147). Упражнения (149).	
§ 2. Отдельные результаты о кольцах	150
1. Целые гауссовы числа (150). 2. Каноническое разложение суммы двух квадратов (152). 3. Полиномиальные расширения факториальных колец (153). 4. Строение мультипликативной группы $U(Z_n)$ (154). Упражнения (158).	

§ 3. Модули	159
1. Первоначальные сведения о модулях (159). 2. Свободные модули (163). 3. Целые элементы кольца (166). Упражнения (167).	
§ 4. Алгебры над полем	168
1. Определения и примеры алгебр (168). 2. Алгебры с делением (тела) (170). 3. Групповые алгебры и модули над ними (174). Упражнения (183).	
§ 5. Неприводимые модули над алгеброй Ли $\mathfrak{sl}(2)$	184
1. Исходный материал (184). 2. Веса и кратности (186). 3. Старший вектор (186). 4. Классификационный результат (187). Упражнения (188).	

ГЛАВА 5

НАЧАЛА ТЕОРИИ ГАЛУА

§ 1. Конечные расширения полей	190
1. Прimitивные элементы и степени расширений (190). 2. Изоморфизм полей разложения (194). 3. Существование примитивного элемента (196). Упражнения (198).	
§ 2. Конечные поля	198
1. Существование и единственность (198). 2. Подполя и автоморфизмы конечного поля (200). 3. Формула обращения Мёбиуса и её применения (201). Упражнения (206).	
§ 3. Соответствие Галуа	207
1. Предварительные результаты (207). 2. Фундаментальное соответствие Галуа (210). 3. Иллюстрации к соответствию Галуа (211). Упражнения (215).	
§ 4. Вычисление группы Галуа	215
1. Действие группы $\text{Gal}(f)$ на корнях многочлена f (215). 2. Многочлены и группы простой степени (217). 3. Метод приведения по модулю p (219). 4. Нормальный базис (224). Упражнения (227).	
§ 5. Расширения Галуа и смежные вопросы	228
1. Простые числа в арифметической прогрессии (228). 2. Расширения с абелевой группой Галуа (229). 3. Норма и след (230). 4. Циклические расширения (233). 5. Критерий разрешимости уравнений в радикалах (235). Упражнения (238).	
§ 6. Жёсткость и рациональность в конечных группах	238
1. Определения и формулировка основной теоремы (239). 2. Подсчёт решений (240). 3. Примеры жёсткости (243). Упражнения (245).	
§ 7. Эпилог	245

ПРИЛОЖЕНИЕ
НЕРЕШЁННЫЕ ЗАДАЧИ

1. Классификация конечных простых групп	248
2. Регулярный автоморфизм	249
3. Странная алгебра Ли	249
4. Проблема Бернсайда	249
5. Конечные группы полиномиальных автоморфизмов	250
6. Просто приводимые группы	250
7. Обратная задача Галуа	251
ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К УПРАЖНЕНИЯМ	254
МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ	263
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ	268

Последнее время всё более распространённой становится точка зрения, что многие области математики являются не чем иным, как теорией инвариантов специальных групп.

Софус Ли

ПРЕДИСЛОВИЕ

Содержание третьей части учебника “Введение в алгебру” можно квалифицировать как весьма серьёзное, но, надо надеяться, не слишком абстрактное продолжение первых двух частей. Новых понятий будет сравнительно немного, по крайней мере в первых четырёх главах. Читатель встретит своих старых “знакомых” по [ВА I, гл. 4] и [ВА II, гл. 7], которые введут его в область гораздо более содержательных понятий. Самое пристальное внимание рекомендуется уделить изучению примеров, которым отведена добрая четверть текста (скажем, материал § 1 гл. 1 и § 3 гл. 3 естественно отнести к примерам). Помимо всего прочего, подбор примеров рассчитан на то, чтобы перебросить мостик между алгеброй и другими разделами математики. Если в результате у читателя окрепнет чувство единства математики, то цель, поставленную автором в третьей части книги, следует считать достигнутой. Той же цели служит заключительная гл. 5, занимающая изолированное место и предназначенная почти целиком для освоения в рамках спецкурса.

Нет необходимости подчёркивать, что “Введение в алгебру” — учебник, рассчитанный на всех университетских студентов-математиков, а не только на будущих алгебраистов. Поэтому на подзаголовок “Основные структуры” надо смотреть снисходительно: это всё те же группы, кольца, поля, расширенные по ассортименту (с геометрическим уклоном), а главное — обогащённые важным понятием линейного представления. Именно модули и линейные представления дают те реализации алгебр и групп, которые постоянно возникают в анализе и геометрии.

А.И. Кострикин

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Адамс Дж.* Лекции по группам Ли. — М.: Наука, 1979.
2. *Атья М., Макдональд И.* Введение в коммутативную алгебру. — М.: Мир, 1972.
3. *Барти Т., Биркгоф Г.* Современная прикладная алгебра. — М.: Мир, 1976.
4. *Белоголов В.А., Фомин А.Н.* Матричные представления в теории конечных групп. — М.: Наука, 1976.
5. *Боревич З.И., Шафаревич И.Р.* Теория чисел. — М.: Наука, 1972.

6. Бурбаки Н. Алгебра (модули, кольца, формы). — М.: Наука, 1966.
7. Вейль Г. Классические группы, их инварианты и представления. — М.: ИЛ, 1947.
8. Вейль Г. Симметрия. — М.: Наука, 1968.
9. Вейль А. Основы теории чисел. — М.: Мир, 1972.
10. Винберг Э.Б. Курс алгебры. — М.: Факториал, 1999.
11. Джекобсон Н. Алгебры Ли. — М.: Мир, 1964.
12. Дьедонне Ж., Мамфорд Д., Керрол Дж. Геометрическая теория инвариантов. — М.: Мир, 1974.
13. Инфельд Л. Эварист Галуа. Избранник богов. — М.: Мол. гвардия, 1958.
14. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. — М.: Наука, 1972.
15. Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. — М.: ГИТТЛ, 1937.
16. Клячко А.А. Теория Галуа: Уч. пособие. — Куйбышев: КГУ, 1982.
17. Кириллов А.А. Элементы теории представлений. — М.: Наука, 1972.
18. Коч П. Универсальная алгебра. — М.: Мир, 1968.
19. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Ч. I. Основы алгебры. — М.: Физматлит, 2000.
20. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Ч. II. Линейная алгебра. — М.: Физматлит, 2000.
21. Сборник задач по алгебре/ Под ред. А.И. Кострикина. — М.: Физматлит, 2000.
22. Курош А.Г. Лекции по общей алгебре. — М.: Наука, 1975.
23. Ленг С. Алгебра. — М.: Мир, 1968.
24. Лидл Р., Пильц Г. Прикладная абстрактная алгебра. — Изд-во Уральск. ун-та, 1996.
25. Мальцев А.И. Алгебраические системы. — М.: Наука, 1970.
26. Понтрягин Л.С. Непрерывные группы. — М.: Наука, 1973.
27. Постников М.М. Теория Галуа. — М.: Физматгиз, 1963.
28. Сергеев Э.А. Элементы теории Галуа: Уч. пособие. — Краснодар: КГУ, 1987.
29. Серр Ж.-П. Линейные представления конечных групп. — М.: Мир, 1972.
30. Серр Ж.-П. Курс арифметики. — М.: Мир, 1972.
31. Херстейн И. Некоммутативные кольца. — М.: Мир, 1972.
32. Холл М. Теория групп. — М.: ИЛ, 1962.
33. Шафаревич И.Р. Основные понятия алгебры. — М.: ВИНТИ, 1986.
34. Шевалле К. Теория групп Ли. — М.: ИЛ, 1948.
35. Edwards H.M. Galois Theory. — N.Y., B.: Springer-Verlag, 1984.
36. Jacobson N. Basic Algebra. I. — San Francisco: Freeman, 1974.
37. Malle G., Matzat B.H. Inverse Galois Theory. — N.Y., B.: Springer-Verlag, 1999.
38. Recent Developments in the Inverse Galois Problem, AMS, Contemporary Mathematics No. 186, 1995.
39. Serre J.-P. Topics in Galois Theory. — Boston: Jones and Bartlett, 1992.
40. Tignol J.-P. Galois' Theory of Algebraic Equations. — Avon: The Bath Press, 1987.
41. Völklein H. Groups as Galois Groups. An Introduction. — Cambridge University Press, 1996.

Ссылки на [19], [20] ниже в тексте заменены для наглядности эквивалентными ссылками на [BA I], [BA II].