

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Перед вами сборник задач Московских математических олимпиад с 1993 по 2005 год<sup>1</sup>. Он содержит около трехсот задач с подробными решениями. Многие задачи снабжены указаниями (подсказками). Все задачи в том или ином смысле нестандартны — их решение требует смекалки, сообразительности, а часто и многочасового размышления. Некоторые из этих задач доступны большинству школьников, другие же столь сложны, что немногие обладатели высшего математического образования смогут их решить.

С другой стороны, важная особенность олимпиадных задач состоит в том, что для их решения не требуется никаких знаний, выходящих за рамки школьной программы. Конечно, это верно лишь в некотором приближении — такие «нешкольные» методы, как принцип математической индукции, уже давно не смущают составителей вариантов.

Но если олимпиадные задачи не требуют специальных знаний, то что же тогда отличает олимпиаду по математике от соревнования по разгадыванию головоломок? Наше убеждение состоит в том, что, в отличие от головоломок, хорошие математические задачи глубоко связаны с важными разделами современной математики, иллюстрируют основополагающие математические принципы. Задачи Московской олимпиады всегда славилась такими связями — например, задачи 93.8.2 и 96.11.4 связаны с древним вопросом о представлении чисел суммами квадратов, а задача 99.10.5 связана с так называемыми *сжимающими отображениями*. Вот еще несколько задач, в которых эти связи наиболее заметны: 93.10.4, 95.10.6, 97.11.3, 99.10.5, 00.10.3, 01.10.5, 02.11.6, 03.10.6, 04.9.3, 04.10.3, 05.8.5, 05.10.6. В этой книге мы всегда старались упомянуть о таких связях в комментариях к решению.

Для многих математиков (включая некоторых авторов этой книги) сборники задач Московских математических олимпиад [58] и [63] были одними из первых книг по математике. Мы хотим пожелать нашим юным читателям,

<sup>1</sup> Из настоящего издания исключен раздел «Избранные задачи 1935—1992 г.» и задачи олимпиад 2006—2008 г.

чтобы эта книга помогла им прикоснуться к очарованию нашей любимой науки.

**Сложность задач.** По традиции составители варианта стараются упорядочить задачи по возрастанию сложности. В «идеальном» варианте первую задачу решает от четверти до половины участников, а последнюю задачу — несколько человек. Задачи, которые (по нашему мнению) слишком сложны для своего места, мы отмечали звездочками. Например, задача 97.10.1 показалась нам слишком сложной для первой задачи — будь она второй, мы не стали бы снабжать ее звездочкой. И уж конечно из того, что задача 97.10.6 не отмечена звездочкой, не следует, что она проще, чем 97.10.1. В тех случаях, когда нам удалось разыскать статистику решения задач, мы пытались привести наши звездочки в соответствие со статистикой.

**Решения.** Мы всегда старались привести решения, не выходящие за рамки школьной программы, и в большинстве случаев нам это удалось. Однако в некоторых задачах мы приводим второй способ решения, в котором используются нешкольные понятия и утверждения. Иногда второй способ изложен очень кратко — в этом случае мы называем его «идея другого способа» или «набросок». Иногда второй способ является лишь незначительной модификацией первого, тогда мы называли его «вариант решения». В этом случае мы считали, что читатель уже изучил основной способ, но не прочь узнать и более элегантное решение.

**Основные факты.** В этом разделе собраны понятия и теоремы, которые наиболее часто встречались в решениях задач данной книги. Мы старались не включать факты, имеющиеся в большинстве школьных учебников, хотя некоторые, плохо, по нашему мнению, изучаемые в школе, присутствуют. Для каждого факта приведен список задач, в которых он используется. Встретив ссылку на факт, порешайте другие задачи, в которых также используется этот факт.

**Указания.** Мы старались давать указания так, чтобы «не раскрыть всех секретов задачи», поэтому не следует думать, что после прочтения указания вы сразу решите задачу. Если задача все равно не решается, то посмотрите ответ, если и это не помогает — прочитайте начало решения.

**Благодарности.** Эта книга — плод коллективной работы многих людей. Во-первых, это авторы задач, без них ни одна олимпиада не могла бы состояться. Их список приведен в конце книги. Мы также должны упомянуть о титаническом труде тех, кто составлял варианты, проводил олимпиады, проверял работы... Наконец, олимпиады не имели бы никакого смысла, если бы на них не приходили школьники. Нам приятно отметить, что многие из тех, кто на олимпиадах решал задачи, опубликованные в этой книге, стали профессиональными математиками.

После каждой олимпиады оргкомитет издавал «книжечку с решениями», которая раздавалась участникам на закрытии олимпиады. Мы брали решения из этих книжечек за основу, исправляли ошибки (и добавляли новые), придумывали новые решения, редактировали их и делали более подробными. Мы хотели бы выразить признательность всем, кто участвовал в написании «книжечек».

Автору часто трудно оценить понятность собственного текста, мы благодарны А. Д. Блинкову, Т. И. Голенищевой-Кутузовой, А. В. Манучаровой, Д. Д. Мухиной, А. М. Фёдоровой и ученикам класса в-2008 школы № 57 г. Москвы за указания на непонятные места.

Многие ценные замечания были высказаны А. В. Акопяном, В. Д. Арнольдом, Т. В. Караваевой, А. А. Кустарёвым, С. В. Маркеловым. Тексты В. В. Прасолова были использованы при написании раздела «Основные факты».

Текст книги внимательно прочитали и сделали много замечаний и предложений В. В. Прасолов и А. В. Семенов. Решения стали гораздо более наглядными благодаря замечательным рисункам, сделанным Н. Шиховой и В. Радионовым. Отдельная благодарность В. Радионову за прекрасный макет книги и указания ряда неточностей в решениях.

## **РАЗМЫШЛЕНИЯ** *о Московских математических олимпиадах*

*В. М. Тихомиров*

**Краткий экскурс в историю.** В 2005 году исполнилось 70 лет со времени проведения первой Московской математической олимпиады. Она была организована по инициативе Московского математического общества Наркомпросом, Московским государственным университетом и школьным отделом горono (министерства в те годы назывались наркоматами, Наркомпрос — это в переводе на современный язык министерство просвещения; горono — городской отдел народного образования). В организационный комитет первой олимпиады вошли многие видные ученые: члены-корреспонденты Академии наук СССР Павел Сергеевич Александров (президент Московского математического общества, избранный членом-корреспондентом в первые академические выборы советского периода в 1929 году, он был председателем оргкомитета олимпиады), Сергей Львович Соболев и Лев Генрихович Шнирельман (избранные во вторые выборы в 1933 году, когда Сергею Львовичу исполнилось только 25 лет, и он стал самым молодым членом Академии), профессор Андрей Николаевич Колмогоров — директор Института математики и механики при МГУ (уже тогда воспринимавшийся как один из крупнейших математиков современности) и другие. Отметим, что большинству членов оргкомитета, в частности тем, кто был назван выше, не исполнилось тогда и сорока лет.

Олимпиада проводилась в два тура. В первом туре, состоявшемся 30 марта 1935 года, участвовали 227 школьников и 65 рабфаковцев, остальные — готовящиеся к поступлению в вуз, всего 314 человек; во втором туре участвовало 120 человек. Победителями первой олимпиады были признаны трое: Игорь Зверев, Коля Коробов и Аня Мышкис.

**Зачем нужны олимпиады?** Председатель оргкомитета первой олимпиады — Павел Сергеевич Александров — писал об этом так:

«Основная забота о будущем советской науки требует, чтобы ни одно математическое дарование [...] не затерялось

зря. Каждому из наших подрастающих талантов обеспечено полное внимание, полная и всесторонняя помощь и поддержка со стороны советского государства и всего социалистического общества нашей страны». И далее: «Одной из наиболее действенных форм нашей помощи самым молодым дарованиям является организация олимпиады, т. е. широкого состязания, широкого социалистического соревнования всех наших школьников, одаренных математически и интересующихся математикой. Это состязание должно заставить лучших из них почувствовать себя уже настоящими математиками, будущими учеными. Оно должно укрепить их веру в себя, зажечь их научный энтузиазм и в то же время заставить их почувствовать, что лишь длинный путь упорной работы приведет их к цели, к участию в качестве квалифицированных математиков, а иногда и больших самостоятельных ученых в той громадной стройке социализма, которая развернулась в нашей стране».

Многие понятия, которыми оперировал П. С. Александров, ныне ушли в прошлое, но я постараюсь выделить из сказанного им то содержание, которое, по моему мнению, должно сохраниться на все времена.

Наука — великое достояние человечества, и для развития науки человечеству разумно озаботиться тем, чтобы ни одно математическое дарование не пропало бы.

Одаренные люди могут принести пользу своему отечеству, и потому государству следовало бы обеспечить полное внимание, полную и всестороннюю помощь и поддержку каждому из подрастающих талантов.

Безусловной истиной является и то, что одной из наиболее действенных форм содействия молодым дарованиям является организация олимпиад, т. е. широкого состязания школьников, интересующихся математикой; это состязание призвано укрепить их веру в себя и зажечь в них научный энтузиазм. Итак, олимпиады могут принести пользу Личности, Стране и Миру.

...Как-то в 2005 году на одном из представительных собраний энтузиастов олимпиадного движения я задал всем тот же вопрос: зачем нужны олимпиады? Он не так-то уж прост, как может показаться на первый взгляд. Когда я предоставил слово А. — ветерану движения и одному из

самых ревностных его энтузиастов, — тот не нашелся, что сказать. На некоторое время установилась тишина, а потом у многих загорелись глаза, и началось бурное обсуждение. Было высказано много замечательных мыслей, но мотивы государства и человечества в них не фигурировали — время сменило приоритеты и на первый план вышли интересы личности. Одни говорили, что участие в олимпиадах определило их жизненный выбор, другие — что оно дало возможность общения с хорошими людьми; было сказано, что участие в олимпиадах дало бесценное ощущение свободы... Все восхваляли олимпиады и благодарили их. Но все же...

**Pro и contra.** По отношению к Николаю Николаевичу Константинову термин «ветеран олимпиадного движения» лишь в самой слабой степени отражает его несравненную роль в организации и проведении олимпиад и различных турниров для школьников. В первом номере третьей серии «Математического просвещения» (за 1997 год) Николай Николаевич поместил статью, вступительная часть которой, озаглавленная «Чем хорошо и чем плохо соревнование», посвящена теме, которую я собираюсь обсудить. Приведу без купюр три абзаца (первый, второй и четвертый) этой замечательной статьи.

«Наука — арена нескольких видов борьбы. Это — и борьба человечества с незнанием, и борьба ученых со своими заблуждениями, и стремление принести пользу людям, и поиск красоты мира, и стремление к славе, и делание собственной карьеры, и заработок. Чтобы наука жила полноценно, нужно, чтобы ее поддерживали различные стимулы — внутренние и внешние. Каждого ученого какой-то стимул подтолкнул в сторону науки. И если этот стимул антинаучный и низменный, большой беды в этом нет. Важно только, чтобы своевременно возникли другие стимулы, соответствующие высшему назначению науки.

Математические олимпиады используют в качестве стимула дух соперничества — в этом сила и слабость математических олимпиад. Сила потому, что в детском возрасте призыв посоревноваться находит отклик в душе почти каждого человека. Этим и объясняется огромный успех олимпиад. Они настолько понравились, что за сто лет их существования стиль их проведения почти не изменился.

В то же время вред духа соревнования очевиден. Прежде всего наука — поприще настолько широкое, что людям на нем никогда не будет тесно. Дух же соревнования сталкивает людей на одну узкую тропинку. Человек в науке ценен своей уникальностью, между тем дух соревнования толкает людей подчиняться критериям прошлой эпохи и гнаться за чужой славой, стараясь ее повторить, вместо того, чтобы занять свое уникальное место. Школьник, увлекшийся олимпиадами, тратит на них все годы своей учебы в старших классах. Даже если он достигает в них прекрасных результатов, их цена оказывается слишком высокой, так как на это уходит заметная часть его творческой жизни.

Я согласен со всем сказанным Николаем Николаевичем, и от себя скажу лишь несколько слов. Сама идея рейтингования человеческих достоинств (все более и более популярная в последнее время) не представляется мне плодотворной. Мне хотелось бы, чтобы в разумном обществе личность не была бы поставлена в такое положение, при котором ей постоянно приходилось бы утверждать себя в конкурентной борьбе.

Приведу еще одну цитату, с которой я солидарен: «Своим успехам на олимпиаде естественно радоваться и даже гордиться ими. Неудачи же на олимпиадах не должны чрезмерно огорчать», — так писал Андрей Николаевич Колмогоров. Далее он продолжал: «Для успеха на олимпиаде необходимы некоторые специальные типы одаренности, которые вовсе не обязательны для успешной исследовательской работы. Уже само наличие назначенного очень ограниченного срока для решения задач многих делает совершенно беспомощными. Но существуют и такие математические проблемы, которые могут быть решены лишь в результате очень длительного и спокойного размышления и формирования новых понятий. Много такого рода проблем было решено замечательным советским топологом П. С. Александровым. И не случайно Павел Сергеевич говорил, что если бы во времена его юности были математические олимпиады, он, возможно, не сделался бы математиком: его главные достижения в математике явились не плодом быстро работающей *изобретательности*, а итогом длительного и углубленного *созерцания*».

**Коротко об эволюции олимпиад.** Если для проведения первой олимпиады был образован организационный комитет, возглавлявшийся крупными учеными и выдающимися деятелями просвещения, то потом все упростилось. Московское математическое общество стало выделять лишь одного своего представителя в качестве председателя организационного комитета (увы, им, как правило, далеко за сорок), а далее формируется команда энтузиастов из старых и молодых олимпиадников, а также студентов и аспирантов, которые и проводят олимпиады. Московское математическое общество принимало участие в организации всех олимпиад, кроме тех, что проходили в 1981—1992 годах. Что послужило причиной отстранения Общества от олимпиад на этот период, пусть объяснит кто-то другой, я этого никогда не мог понять. Скажу только, что этот исторический прецедент возымел неожиданное побочное и положительное влияние на развитие олимпиадного движения. Вместе с Матобществом был отстранен от проведения олимпиад и Н. Н. Константинов, патриарх движения. Но Николай Николаевич принадлежит к числу тех личностей, чей энтузиазм преодолевает все препятствия. Им был организован Турнир городов, в котором Николай Николаевич постарался, среди прочего, приглушить «соревновательную компоненту». Этот турнир стал разрастаться, приобретая международный характер. Николай Николаевич стал желанным гостем во многих странах мира. Ему принадлежат также идеи московского турнира Ломоносова, различных летних конференций и многого другого.

В 2005 году состоялась шестьдесят восьмая Московская математическая олимпиада (в трудные военные годы — в 1942 и 1943 — часть университета была эвакуирована, и олимпиады в Москве не проводились). Олимпиада-2005 была организована Департаментом образования города Москвы, Советом ректоров учебных заведений Москвы и Московской области, Московским государственным университетом им. М. В. Ломоносова, механико-математическим факультетом, Московским математическим обществом, Московским институтом открытого образования и Московским центром непрерывного математического образования. Мы видим, что число покровителей олимпиады возросло.

Олимпиада проходила в один тур отдельно для 6 и 7 классов (это состязание, называемое «Математический праздник», — новый вид соревнования, организуемый МЦНМО по инициативе Д. Ботина, А. Спивака и И. Яценко, — проводится в один день; в 2005 году Матпраздник состоялся 13 февраля, в нем приняло участие около 1500 школьников), олимпиада 8—11 классов проходила 27 февраля, показ и разбор задач состоялся 13 марта. В олимпиаде приняли участие около двух с половиной тысяч школьников.

**Еще некоторые сопоставления.** К моменту проведения первой математической олимпиады в Москве существовал лишь один школьный математический кружок. Им руководил 21-летний доцент И. Гельфанд. Ныне Израиль Моисеевич Гельфанд — один из самых выдающихся математиков современности. Сейчас в Москве действует множество школьных кружков в разных местах. Интересно было бы посмотреть через 70 лет, много ли среди нынешних руководителей кружков окажется математиков, сравнимых с И. М. Гельфандом.

Сразу же после олимпиады 1935 года были организованы новые кружки в МГУ. Первое время доклады на них делали руководители кружков и школьники. Решительная перестройка кружковой работы связана с именем студента МГУ Д. Шклярского, бывшего в числе победителей 2-й олимпиады 1936 года, талантливого математика и блестящего преподавателя, руководившего работой кружков в 1938—1941 годах. Друзья вспоминают, что Шклярский был фанатично предан математике. Он мог без конца говорить о ней. Очень любил возиться со школьниками. Шклярский изменил стиль работы кружков. Заменял доклады школьников на решение задач. С тех пор так и повелось. Теперь такая форма кружковой работы стала доминирующей.

Хочу сказать несколько слов о судьбах победителей первых олимпиад. Все они стали студентами мехмата. Все участвовали в Великой Отечественной войне. Анна Вениаминовна Мышкис и Давид Оскарович Шклярский погибли, Игорь Николаевич Зверев и Николай Михайлович Коробов вернулись с войны и всю жизнь потом были связаны с мехматом.

Хотелось бы надеяться, что участникам олимпиад, которые проводились в прошлом и будут проводиться в нашем веке, не доведется испытать ужасов войны.

**О задачах.** На первой олимпиаде задачи были разделены на три группы. Первую группу составляли геометрические задачи, вторую — алгебраические, третью — комбинаторные. Возможно, это было связано с пожеланием А. Н. Колмогорова, который выделял три вида математических способностей, присоединяя к воображительным (геометрическим) и логическим способностям (соответствующим разделению мозга на левую и правую половины) еще и способности алгебраические (способности делать выкладки и преобразования). Эксперимент с тремя группами задач не был поддержан в дальнейшем, и в последние годы олимпиадные задачи допускают, как мне кажется, такую классификацию: простенькие головоломки, простенькие геометрические задачи, сложные головоломки, сложные геометрические задачи и трудно разрешимые задачи, часто берущиеся из каких-то серьезных исследований. Всякий раз, когда я участвовал в организации олимпиад, я предлагал вводить понемногу задачи анализа, и иногда они включались в варианты. Я был очень рад, когда Николай Борисович Васильев — организатор и участник множества олимпиад и необыкновенно светлая личность, — встретив меня как-то, сказал радостно, что, вспомнив мои пожелания, он придумал красивую задачу из анализа (задачу «о вишенке» на олимпиаде 1994 года, 11.3). Задачи анализа способны приоткрыть необъятный мир поразительной красоты, ибо анализ связан с объяснением окружающей нас действительности, и олимпиадные задачи могут стимулировать интерес к изучению анализа в школе.

Среди олимпиадных задач я бы выделил особую группу *задач на все времена*, задач, обладающих особой прелестью, которые можно предлагать кому угодно и в которых запрятано богатое содержание. Здесь все зависит от личного вкуса. На первой олимпиаде такой задачей для меня была задача о раскраске куба. Ее тогда не решил никто. Основываясь на одном воспоминании, я подозреваю, что это задача Гельфанда.

В заключительной части дополнения А обсуждается «задача о мухе», предложенная Игорем Федоровичем Шарыги-

ным. Это тоже, по моему мнению, задача на все времена. Сама же тема «олимпиадные задачи» далеко не исчерпана.

**Мальчики и девочки.** На протяжении едва ли не всей культурной истории мужчины стараются обосновать суждение, что они умнее женщин. Один из аргументов: ведь среди женщин нет великих математиков. Спор на эту тему завел бы нас слишком далеко, скажу только, что особенно убедительных аргументов в пользу интеллектуального превосходства мужчин над женщинами я лично не слышал. То, что девочки в меньшем, чем мальчики, числе участвуют в олимпиадах, можно объяснять социологическими причинами, не связанными с уровнем интеллекта. Но в двух олимпиадах последних лет (в 1993 и 2005 годах) оба раза первое место (в одном из классов) единолично занимали именно девочки. Это Лена Бунина — лауреат первой премии по 11 классам олимпиады 1993 года — и Маша Илюхина — лауреат первой премии по девятым классам олимпиады 2005 года. Хочу пожелать им и другим участницам олимпиадного движения счастливой научной судьбы.

И последнее:

**Несколько слов об этой книге.** На протяжении семидесяти лет было издано несколько книг, посвященных московским олимпиадам. Назову три: это небольшая книжка Р. Н. Бончковского «Московские математические олимпиады 1935 и 1936 гг.» (ее автор погиб на войне), книга А. А. Лемана [63] и книга Г. А. Гальперина и А. К. Толпыго [58] (вышедшая невиданным по нашим временам тиражом в 600 000 экземпляров и ставшая библиографической редкостью). Возникла идея подвести итоги семидесятилетней истории московских математических олимпиад. Читатель держит сейчас в руках книгу, которой мы начинаем реализацию этого замысла. В ней отражены последние тринадцать олимпиад — от олимпиады-1993 до олимпиады-2005.

Я с большим удовольствием вспоминаю олимпиады, в организации которых я принимал участие, особенно олимпиаду 1993 года. Как я уже сказал, она проводилась после двенадцатилетнего периода, когда Математическое общество было отстранено от участия в олимпиадах. Многие истосковались по этой деятельности. В проведении той

олимпиады по моей просьбе приняло участие много моих коллег старшего поколения (в их числе победители олимпиад разных лет — профессора университета Ю. С. Ильяшенко, А. А. Кириллов, В. П. Паламодов), очень активное участие в составлении задач принял Игорь Федорович Шарыгин (в частности, задачи 9.1, 9.6, 10.6 и задача о мухе принадлежат ему). Олимпиады хороши, в частности, и тем, что объединяют очень хороших людей и оставляют самые теплые воспоминания.

*Москва, 2005 г.*