Оглавление

Вместо предисловия **8**

Лекция 0. Обзорная **11**

Часть I. Теорема Шварца — Милнора **15**

Лекция 1. Грубые отображения **16**

1.1. Грубые отображения метрических пространств 17

1.2. Геодезические пространства 20

1.3. Грубая эквивалентность пространств 23

1.4. Графы 26

1.4.1. Графы Кэли 26

1.4.2. Геометрическая реализация графов 30

Лекция 2. Теорема Шварца — Милнора **33**

2.1. Метрическая связность 35

2.2. Псевдометрика 37

2.3. Теорема Шварца — Милнора 41

2.3.1. Доказательство теоремы 41

2.3.2. Следствия 43

Задачи **45**

Часть II. Грубые пространства и компактификации **47**

Лекция 3. Грубые структуры **48**

3.1. Определение грубых структур 48

3.1.1. Грубое пространство 49

3.1.2. Метрические грубые структуры 51

3.2. Свойства грубых структур 52

3.2.1. Метризуемость 54

3.3. Грубая ограниченность 57

3.3.1. Ограниченные множества 57

3.3.2. Грубая эквивалентность 59

3.4. Моногенность и геодезичность . . . 61
3.4.1. Моногенные грубые структуры . . . 61
3.4.2. Грубый критерий геодезичности . . . 63

Лекция 4. Компактификации и концы . . . 65

4.1. Топологические компактификации . . . 65
4.1.1. Регулярность и нормальность . . . 65
4.1.2. Компактификации хаусдорфова пространства . . . 67
4.1.3. Минимальная и максимальная компактификации . . . 68
4.2. Грубые компактификации . . . 71
4.2.1. Грубая топологическая структура . . . 71
4.3. Концы . . . 73
4.3.1. Пространства Фрейденталя . . . 74
4.3.2. Концы пространства . . . 75
4.3.3. Грубость концов . . . 78
4.3.4. Концы графов . . . 79
4.3.5. Классификация концов в графе . . . 80
4.3.6. Число концов групп . . . 81

Лекция 5. Грубые компактификации . . . 83

5.1. Компактификация по Фрейденталю . . . 83
5.1.1. Бинарное дерево . . . 84
5.1.2. Локально конечные графы . . . 85
5.1.3. Граница $\mathfrak{f}X$ и метризуемость . . . 87
5.1.4. Двойственность Стоуна . . . 89
5.1.5. Примеры не метризуемых пространств . . . 91
5.2. Компактификация по Хигсону . . . 93
5.2.1. Функции Хигсона на метрическом пространстве . . . 94
5.2.2. Компактификация Хигсона . . . 95
5.2.3. Универсальность . . . 96

Задачи . . . 99

Часть III. Рост и аменабельность 101

Лекция 6. Скорости роста . . . 102

6.1. Функции роста в графе . . . 102
6.1.1. Тип роста . . . 103
6.1.2. Функции роста графов . . . 104
6.2. Теорема Басса — Гиварка . . . 106

6.2.1. Доказательство верхней оценки теоремы Басса — Гиварка 107
6.2.2. Следствия и обобщения 111
6.3. Рост в грубых пространствах 112
6.3.1. Ёмкость и энтропия 112
6.3.2. Пространства ограниченной геометрии 114
6.3.3. Немного о мере 115

Лекция 7. Аменабельность и теорема Фёльнера 118

7.1. Фёльнеровость 118
7.1.1. Фёльнеровы системы множеств 118
7.1.2. Условия неаменабельности 120
7.2. Случай групп 123
7.2.1. Среднее 124
7.3. Теорема Фёльнера 127
7.3.1. Вспомогательные утверждения 127
7.3.2. Доказательство теоремы Фёльнера 128
7.4. Парадоксальные декомпозиции 130
7.4.1. Частичные сдвиги 130
7.4.2. Парадоксальные разбиения 132

Задачи 134

Часть IV. Гиперболичность 137

Лекция 8. Гиперболичность по Громову 138

8.1. Гиперболические пространства 138
8.1.1. Произведение Громова 138
8.1.2. Определения гиперболических пространств 141
8.1.3. Пространство Лобачевского 143
8.2. Грубость гиперболичности 146
8.3. Гиперболические группы 149
8.3.1. Конечнопредставленные гиперболические группы 150
8.3.2. Элементарные и не элементарные гиперболические группы 152

Лекция 9. CAT-пространства 154

9.1. Модельные пространства 154
9.1.1. Геометрическое определение 154
9.1.2. Изометрии модельных пространств 157

9.2. Сравнение с модельными пространствами 159
9.2.1. Треугольники сравнения 159
9.2.2. CAT-сравнение пространств 161
9.3. Гиперболичность и прозрачность 164
9.3.1. Видимость и невидимость 164
9.3.2. Локальная прозрачность в пространствах Адамара . . 166
9.3.3. Критерий гиперболичности в CAT(0) 168

Задачи 170

Часть V. Вложения 173

Лекция 10. Асимптотическая размерность 174

10.1. О вложениях 174
10.2. Грубые вложения 175
10.2.1. Вложения деревьев 177
10.3. Асимптотическая размерность 179
10.3.1. Определение в метрических пространствах 179
10.3.2. Асимптотическая размерность групп 182
10.3.3. Общий случай грубых пространств 184
10.3.4. Свойства асимптотической размерности 185
10.4. Свойство А 187

Лекция 11. Препятствия к вложимости 190

11.1. Экспандеры 190
11.1.1. Препятствие к вложимости 192
11.1.2. T-свойство Каждана 193
11.1.3. Пример экспандера 196
11.2. Вложимость в $\mathbb{R}^n$ 197
11.2.1. Группы, вложимые в $\mathbb{R}^n$ 197
11.2.2. Условие удвоения 198
11.2.3. Снежинка пространства 200
11.2.4. Теоремы Ассуа и Наора — Неймана 201

Лекция 12. Неподвижные точки 205

12.1. Борнологические группы 205
12.1.1. Свойства борнологических групп 205
12.1.2. T-свойство в борнологических группах 207
12.2. Грубая неподвижная точка 208
12.2.1. Классические результаты 209

12.2.2. Действие группы 210
12.2.3. Действие произвольных групп
и неподвижные точки 212
12.3. Классификация грубых точек 214

Задачи 216

Часть VI. Приложения 217

Приложение A. Теорема Халина о решётке 218

A.1. Определения и вспомогательные утверждения 218
A.2. Формулировка и доказательство 220

Приложение B. Концы вершинно-транзитивных графов . . . 226

B.1. Тонкость концов линейных графов 226
B.2. Вершинно-транзитивные графы 227

Приложение C. Диаграммы сопряжённости 232

C.1. Геометрия диаграмм сопряжённости 232
C.2. Нильпотентные группы ранга 2 235
C.3. Число концов диаграмм сопряжённости 237

Литература 240

Предметный указатель 246