Введение

В основу этой книги легли материалы лекций и семинаров по курсу «Прикладные методы анализа», читавшемуся студентам факультета математики ВШЭ в 2022 и 2023 годах. Главной задачей курса было научить студентов простейшим приемам обращения с уравнениями в частных производных и специальными функциями, возникающими в физических задачах, и осветить некоторые вопросы технического характера, которые обычно обходят стороной в стандартных курсах анализа и теории функций комплексного переменного. Основное внимание уделено тому, чтобы была понятна суть дела, при этом постоянно приносятся в жертву строгость и общность изложения. Мы, как правило, рассматриваем задачу в самой простой нетривиальной ситуации. Так, например, теория потенциала развивается у нас исключительно в двух измерениях. Мы надеемся, что читатель, поняв суть дела на этом простом примере, сможет при необходимости сам разобраться в технически более сложном случае трех измерений по существующим учебникам.

Основу курса составляет теория стандартных для математической физики уравнений — уравнения Лапласа, уравнения теплопроводности и волнового уравнения. Это важнейшие примеры соответственно эллиптических, параболических и гиперболических линейных уравнений в частных производных. Рассмотрение краевых задач для уравнения Лапласа и задач Коши для уравнения теплопроводности и волнового уравнения происходит с помощью функций Грина. Функция Грина — это функция двух аргументов, являющаяся решением соответствующего неоднородного уравнения по каждому аргументу со специальной неоднородностью, имеющей вид δ-функции, локализованной на «диагонали», т. е. при совпадающих значениях аргументов. Явные решения задач на собственные значения для оператора Лапласа в физически интересных случаях двух и трех измерений в диске или в шаре требуют использования специальных функций — цилиндрических и сферических (функций Бесселя, полиномов Лежандра). Этот материал совершенно стандартен и много раз излагался в учебниках. Все это предваряется главами, в которых в минимально необходимом объеме изложен технический аппарат — теория интегралов типа Коши и теория обобщенных функций.

Наряду с традиционным для курсов уравнений математической физики материалом в лекции включены две нестандартные для такого рода курсов темы, которые хотя и стоят несколько особняком, естественным образом примыкают к более традиционным вещам. Это, во-первых, обсуждение задач спектральной геометрии и процедура регуляризации детерминантов оператора Лапласа в плоских областях, что находится в прямой связи с теорией уравнения теплопроводности. А именно, информация о геометрии области извлекается из асимптотики функции Грина уравнения теплопроводности (так называемого теплового ядра) на «диагонали» на малых временах. Регуляризация детерминанта оператора Лапласа тоже осуществляется с помощью асимптотики теплового ядра и широко используется в физике при нахождении статистических сумм и эффективных потенциалов в квантовой теории поля. Во-вторых, две главы посвящены нелинейным интегрируемым уравнениям в частных производных — уравнению Кортевега—де Фриза и уравнению Кадомцева—Петвиашвили, которые в настоящее время сравнялись по значимости с классическими линейными уравнениями математической физики. Их теория и методы решения, совершенно отличные от методов решения линейных уравнений, пока совершенно недостаточно отражены в учебной литературе. Сознавая, что полная теория этих уравнений может составить предмет отдельного курса, мы ограничились малым — объяснением того, как строятся точные многосолитонные решения этих уравнений.

В идейном плане мы стремились связать материал лекций с фундаментальными обратными задачами математической физики и подчеркнуть эту связь. Имеются в виду такие обратные задачи, как обратная задача теории потенциала (восстановление формы тела по создаваемому им гравитационному полю), обратная задача спектральной геометрии (восстановление формы мембраны по ее собственным частотам колебаний) и обратная задача теории рассеяния (нахождение потенциала по данным рассеяния на нем). Обратная задача теории потенциала естественным образом возникает в контексте обсуждения свойств объемных потенциалов и формулируется как задача о восстановлении формы области по ее гармоническим моментам (коэффициентам ряда Тейлора в разложении потенциала на бесконечности). В общем случае эта задача не имеет конструктивного решения и, более того, решение, вообще говоря, не единственно — известны примеры различных областей с одинаковыми моментами. Тем не менее при некоторых предположениях можно доказать единственность. Мы приводим доказательство локальной единственности, т. е. того, что малая деформация заданной области с гладкой границей, при которой все моменты не меняются, тривиальна (тождественна). Как уже отмечалось, обратная задача спектральной геометрии тесно связана с теорией уравнения теплопроводности. Задача Коши для уравнения

Кортевега—де Фриза сводится к обратной задаче теории рассеяния на прямой.

Остановимся несколько более подробно на содержании книги.

Первые две главы носят вспомогательный характер и содержат технический аппарат, широко используемый в дальнейших главах. Так как мы рассматриваем краевые задачи и теорию потенциала исключительно в двух измерениях, мы где возможно применяем методы комплексного анализа: теория гармонических функций и краевых задач для них, а также теория потенциала в двух измерениях тесно связана с теорией голоморфных функций (о гармонической функции полезно думать как о вещественной или мнимой части голоморфной функции). В частности, в главе 4 нам нужны формулы для граничных значений интегралов типа Коши (формулы Сохоцкого—Племеля), которые выводятся в главе 1. При этом вводится важное понятие контурного интеграла типа Коши в смысле главного значения. В главе 2 кратко излагаются элементы теории обобщенных функций, из которых в математической физике наиболее широко применяется δ-функция Дирака. Сначала дано неформальное «физическое» описание с целью выработать у читателя интуитивное понимание, а затем приводится математически строгое определение обобщенных функций как линейных функционалов на пространстве обобщенных функций.

Глава 3 посвящена краевым задачам для гармонических функций — решений уравнения Лапласа

$$\Delta u = 0,$$

где Δ — оператор Лапласа. Как уже было сказано, мы рассматриваем простейший случай двух измерений, где возможно использование методов комплексного анализа. Обсуждаются две основные краевые задачи — задача Дирихле, когда заданы граничные значения функции, и задача Неймана, когда заданы значения ее нормальной производной на границе области. Общее решение краевых задач выражается с помощью функции Грина. Кроме того, мы доказываем формулу Адамара для вариации функции Грина при малом изменении формы области.

В главе 4 развивается теория потенциала в двух измерениях. Потенциал в физике — это вещественнозначная функция, производные которой по пространственным координатам представляют собой компоненты вектора напряженности поля (электрического или гравитационного). Мы обсуждаем так называемые объемные потенциалы, создаваемые зарядами или массами, распределенными в объеме (в двух измерениях — на площади) с некоторой плотностью, потенциалы простого слоя, создаваемые зарядами, сосредоточенными на одномерных кривых, и потенциалы двойного слоя, создаваемые точечными диполями, распределенными на кривых. В связи с объемными потенциалами естественным образом ставится обратная задача теории потенциала — задача о восстановлении формы области по ее гармоническим моментам — и методами комплексного анализа доказывается теорема о локальной единственности ее решения. В конце этой главы рассмотрен почти тривиальный, но поучительный пример теории потенциала в одном измерении (на прямой).

В главе 5 методом разделения переменных решается уравнение Гельмгольца

$$\Delta u = -\lambda u,$$

т. е. уравнение на собственные значения и собственные функции оператора Лапласа на диске и в шаре с нулевыми граничными условиями. Это требует введения специальных функций — цилиндрических и сферических (функций Бесселя, полиномов Лежандра).

Глава 6 посвящена важнейшему примеру параболических уравнений — уравнению теплопроводности

$$u_t = \Delta u,$$

описывающему такие физические процессы, как распространение тепла в материальном теле или диффузию. В начале главы дан эвристический вывод этого уравнения в одном измерении. Общее решение выражается с помощью функции Грина (теплового ядра) — ядра оператора $e^{t\Delta}$.

К главе 6 естественным образом примыкает глава 7, в которой дается понятие об обратной задаче спектральной геометрии, т. е. о восстановлении формы области по ее собственным частотам колебаний (собственным значениям оператора Лапласа в области), и показано, что информация о таких простейших геометрических характеристиках области, как площадь и периметр, содержится в сингулярных членах разложения теплового ядра на «диагонали» при малых временах, или, эквивалентно, в распределении больших собственных значений оператора Лапласа. Кроме того, в этой главе рассматривается важная для квантовой теории поля задача о регуляризации детерминанта оператора Лапласа (который при наивном определении расходится) и выводится формула для регуляризованного детерминанта двумерного оператора Лапласа в компактной области с гладкой границей на плоскости (формула Полякова—Альвареса).

В главе 8 строятся решения волнового уравнения

$$u_{tt} = \Delta u$$

в одном, двух и трех измерениях. Основным инструментом служат функции Грина. Волновое уравнение описывает (в линейном приближении) распространение продольных или поперечных колебаний в среде, таких, например, как колебания струны, звук или электромагнитные волны. В начале главы дан вывод волнового уравнения из физических соображений.

В последних двух главах мы занимаемся нелинейными уравнениями в частных производных. В настоящее время известно значительное количество важных для приложений нелинейных уравнений, для которых можно если и не решить задачу Коши, то предъявить большой запас точных решений — например, солитонных решений, благодаря чему эти уравнения часто называют солитонными.

Глава 9 посвящена знаменитому нелинейному уравнению Кортевега—де Фриза (КдФ)

$$4u_t - 6uu_x - u_{xxx} = 0,$$

описывающему распространение возмущений в одномерной среде при учете нелинейных эффектов и дисперсии. В современной математической физике это уравнение занимает столь же важное место, что и линейное волновое уравнение, хотя решается совершенно другими методами. Цель главы — познакомить читателя с этими методами. Мы даем понятие о представлении Лакса, методе обратной задачи рассеяния и объясняем, как строятся солитонные решения уравнения КдФ.

В главе 10 обсуждается двумерное обобщение уравнения КдФ — уравнение Кадомцева—Петвиашвили (КП)

$$3u_{yy} = \left(4u_t - 6uu_x - u_{xxx}\right)_x,$$

возникшее изначально в физике плазмы и имеющее сегодня также и другие важные приложения. В главе объясняется, как строятся солитоноподобные решения этого уравнения, а также точные решения некоторых других типов. Практически весь материал двух последних глав ранее не излагался в учебной литературе.

Наконец, в книге имеется приложение, в котором дается понятие о простейших и наиболее часто используемых асимптотических методах вычисления интегралов и сумм — методе Лапласа, методе стационарной фазы и формуле Эйлера—Маклорена.

К каждой главе подобрано некоторое количество задач разной степени сложности — от совсем простых, требующих только понимания определений и, возможно, не слишком длинной цепочки прямых вычислений, до таких, для решения которых кроме этого требуется известная изворотливость ума (таких, впрочем, не много). На задачи стоит обратить особое внимание, поскольку некоторые важные для понимания вещи отражены не в основном тексте главы, а именно в задачах. Поэтому полностью приведены решения задач либо ответы и комментарии разной степени подробности. Обращаться к ним следует после попыток решить задачу самостоятельно.

В конце книги имеется небольшой список литературы к курсу. Ее выбор очень субъективен. В основном это учебники и монографии, которые стоят на полке у меня дома и которыми я пользовался при подготовке к лекциям и семинарам. Кроме того, в списке литературы есть несколько важных оригинальных статей, результаты которых до сих пор не были отражены в учебной литературе.

Предполагается, что читатель хорошо знаком с теорией функций комплексного переменного и, в частности, такими ее базовыми понятиями, как голоморфные функции, интегралы Коши, вычеты и конформные отображения. Кроме того, от читателя требуется знание основ линейной алгебры, анализа и теории обыкновенных дифференциальных уравнений. При чтении главы 9 нелишним будет знакомство с элементами квантовой механики (уравнением Шрёдингера и теорией рассеяния на прямой).

Материал каждой главы приблизительно соответствует содержанию одной лекции. Изложение во многом организовано в стиле лекционного курса — так, я отказался от нумерации формул и перекрестных ссылок на них, поскольку это невозможно на живой лекции у доски.

Я благодарен К. Зыбину и В. Прокофьеву, с которыми мы вместе вели занятия со студентами, а также В. Лосякову, А. Погребкову и С. Хорошкину, записями лекций которых я пользовался при подготовке этой книги.