

Предисловие к новому изданию

К 270-летию Московского университета коллектив преподавателей кафедры математического анализа механико-математического факультета под моим руководством подготовил к публикации две версии учебного пособия «Математический анализ в задачах и упражнениях». Первая из них вышла в свет в 2024 г. и является исправленной версией трёхтомника 2017—2018 гг., которая полностью совместима с ним: сохранена нумерация примеров и заданий, при этом исправлены все неточности, которые были выявлены за прошедшие годы. Можно считать эту версию окончательной в смысле реализации нашего исходного замысла.

Вторую финальную версию пособия вы сейчас держите в руках, и о ней следует сказать подробнее. После выхода издания 2017—2018 гг. и с началом его активного использования на механико-математическом и других факультетах Московского университета методическая работа коллектива не только не остановилась, но и продолжилась. Изменения, произведённые в пособии в ходе этой работы, значительны и носят не только содержательный, но и методический характер. Решено отказаться от формального деления заданий на теоретические («задачи») и практические («упражнения») и, как следствие, от размещения их в разных параграфах. Вместо этого по каждой теме выстроена методически выверенная последовательность заданий, в которой задачи, решаемые с помощью некоторого типового алгоритма, перемежаются с творческими. При этом не только сохранён, но и расширен набор заданий, приводимых с полными решениями, причём каждое такое задание теперь заняло своё место и в общем списке задач. В связи с возросшим объёмом пособия принято решение издать его в четырёх томах.

В томе 1 рассматриваются понятие элементарной функции и её основные свойства, элементы теории множеств и отображений, предел последовательности, предел и непрерывность функции одной переменной, дифференциальное исчисление функций одной переменной.

В томе 2 рассматриваются интегральное исчисление функций одной переменной (первообразная и неопределённый интеграл, интеграл Римана и понятие несобственного интеграла), а также предел, непрерывность и дифференциальное исчисление функций нескольких переменных.

В томе 3 рассматриваются числовые ряды и бесконечные произведения, функциональные последовательности и ряды, несобственные интегралы функций одной переменной, собственные и несобственные интегралы, зависящие от параметра, специальные функции, ряды Фурье и преобразование Фурье.

В томе 4 рассматриваются кратные, криволинейные и поверхностные интегралы, векторный анализ, дифференциальные формы, их интегрирование и понятие общей формулы Стокса, а также приложения: теории степенных рядов для решения дифференциальных уравнений, методов математического

анализа к задачам экономики, комплексного анализа к вычислению несобственных интегралов.

Предложенная внутри каждой темы классификация заданий по уровню сложности призвана помочь преподавателю (или тому, кто изучает математический анализ самостоятельно) выбрать подходящую глубину изучения материала. Для этого потребовалось добавить значительное число заданий разного уровня сложности. Особое внимание уделено началу пособия: оно адресовано вчерашним школьникам, должно быть им доступно и призвано быстро поднимать их на необходимый уровень владения предметом. Помимо того, пособие дополнено новым материалом по ряду тем: несобственный интеграл, функции ограниченной вариации, основные нормы и метрики в конечномерных пространствах и др. Особо отмечу, что написана также завершающая пособие отдельная глава, посвящённая приложениям математического анализа. Рассматриваются приложения изложенных в предшествующих главах методов к другим разделам математики и решению ряда прикладных задач, в частности в области экономики. Например, демонстрируется использование аппарата дифференциального исчисления функций нескольких переменных для решения оптимизационных экономических задач.

Мы надеемся, что новая версия пособия также найдёт своего читателя, а каждый из коллег сможет выбрать такой подход к использованию задачника, который ему ближе.

В работе по подготовке настоящего издания участвовали как опытные, так и молодые сотрудники кафедры математического анализа механико-математического факультета: Ю. В. Андрианова, А. В. Бегунц, Д. Б. Букин, А. Г. Гаргянц, Д. В. Горяшин, Д. В. Копьёв, Н. Л. Кудрявцев, Т. П. Лукашенко, А. В. Мелешкина, К. С. Платонова, М. Г. Плотников, С. С. Пухов, Т. В. Родионов, С. В. Шапошников. Благодарю всех, кто внёс вклад в совершенствование пособия.

*Ректор Московского университета,
заведующий кафедрой математического анализа
механико-математического факультета МГУ,
академик РАН В. А. Садовничий*

Из предисловия к первому изданию

Отечественную школу преподавания математики всегда отличало сочетание чёткости рассуждений с глубиной содержания и в то же время с простотой, доступностью, конкретностью изложения материала, которые предпочитают формальным конструкциям. Математическое образование и математическая культура составляют стержень научного знания, и значение математики как основы фундаментальных исследований постоянно возрастает. Для решения этих задач требуются учебники, отражающие современное состояние и мировоззренческие принципы данной области науки. Но важно помнить слова Н. И. Лобачевского: «Новая книга начал математики не должна напрасно умножать число существующих, потому что их и без того уже много».

Предлагаемое вниманию читателей учебное пособие «Математический анализ в задачах и упражнениях» является руководством для проведения семинарских занятий по основному курсу математического анализа для вузов, оно также удобно для самостоятельной работы студентов. В книге обобщён и методически переработан опыт преподавания предмета на механико-математическом факультете МГУ имени М. В. Ломоносова за последние десятилетия.

Настоящее издание представляет собой переработку и дополнение наших книг «Задачи и упражнения по математическому анализу» и «Математический анализ в задачах и упражнениях», вышедших с 1988 г. по 2003 г.

Вся большая и сложная работа по переработке пособия была проведена группой сотрудников кафедры математического анализа механико-математического факультета МГУ, в которую вошли Ю. В. Андрианова, А. В. Бегунц, Д. В. Горяшин, А. И. Камзолов, Д. В. Копьёв, О. Н. Косухин, А. К. Кравцева, Т. П. Лукашенко, С. М. Лыткин, Е. В. Мартынова, Ю. В. Межевова, А. В. Мелешкина, С. С. Пухов, Т. В. Родионов, Т. В. Салова, А. П. Солодов, А. А. Флёров, В. В. Фуфаев, Д. В. Фуфаев, А. И. Штерн. Авторы благодарят всех коллег, затративших силы и время на кропотливый и ответственный труд по подготовке настоящего издания.

Как пользоваться пособием

Знакомство с материалом каждой главы удобно начинать с изучения теоретической части и рассмотрения приведённых решений. С целью развития умения самостоятельно выполнять задания по данной теме следует обратиться к корпусу задач, при этом соответствующий диапазон номеров указан в конце текущего пункта или параграфа и отмечен знаком 🏠.

Рядом с номерами некоторых задач помещены символы.

— Символом \diamond отмечены задачи, полные решения которых приведены в тексте текущей главы.

— Символом \checkmark отмечены задачи по данной теме, совокупность которых охватывает различные её аспекты; умение решать эти задачи свидетельствует об освоении данной темы в целом.

— Символом $^\circ$ отмечены задачи «нулевого» уровня, обычно сводящиеся к непосредственному применению готовой формулы или решаемые практически в уме; зачастую такие задачи являются вводными при рассмотрении новой темы.

— Звёздочкой $*$ отмечены задачи «повышенной сложности», решение которых требует достаточной свободы владения изучаемым материалом.

В конце каждого тома пособия помимо оглавления приведён предметный указатель, позволяющий быстро найти как теоретический материал и примеры решения заданий, связанных с искомым математическим понятием, методом или фактом (номера страниц указаны прямым шрифтом), так и сами задачи, если в их формулировке явно указано применение соответствующего метода (номера страниц выделены курсивом).