

Оглавление

Том 2

Предисловие	543
Глава XXI. Винеровская мера	
§ 1. О мерах, заданных на множествах в конечномерных и бесконечномерных пространствах	545
§ 2. Винеровская мера. Концепция абстрактной винеровской меры — гауссовской меры на сепарабельном банаховом пространстве	555
§ 3. Квазиинвариантность винеровской меры	563
§ 4. О некоторых вычислениях по винеровской мере	566
§ 5. Формула Камерона—Мартина	569
§ 6. О конструкции броуновского движения в исчислении Т. Хида	573
Глава XXII. Дифференциальные уравнения в частных производных и стохастические представления решений некоторых из них	
§ 1. Уравнение теплопроводности	575
§ 2. Уравнение и формулы Фейнмана—Каца	585
§ 3. Уравнение и формула Блэка—Шоулса	593
§ 4. Уравнение Шрёдингера	603
Глава XXIII. О роли броуновского движения в классических и функциональных предельных теоремах. Метрические пространства. Критерии слабой сходимости	
§ 1. Некоторые наводящие примеры	605
§ 2. Метрические пространства — 1. Определения	609
§ 3. Метрические пространства — 2. Определения	614
§ 4. Метрические пространства — 3. Компактность	618
§ 5. О разных эквивалентных критериях слабой сходимости мер на метрических пространствах	620
§ 6. Некоторые замечания о последовательностях независимых случайных величин	625
Глава XXIV. Регулярность, плотность и равномерная плотность вероятностных мер. Критерии равномерной плотности	
§ 1. Регулярность	627
§ 2. Плотность	629

- § 3. Равномерная плотность 631
 § 4. Метрики Леви и Прохорова 634

Глава XXV. Слабая сходимость вероятностных мер на метрических пространствах

- § 1. Теорема Прохорова 637
 § 2. Метод одного вероятностного пространства в теории слабой сходимости мер на метрических пространствах. Измеримые отображения 640
 § 3. Критерий компактности множеств в $C[0, 1]$: теорема Арцела—Асколи 643
 § 4. Критерий равномерной плотности в $C[0, 1]$ 645
 § 5. Определяющие классы и классы, определяющие сходимость, в $C[0, 1]$. Конечномерные распределения 647
 § 6. Существование винеровской меры. Принцип инвариантности Донскера 652
 § 7. Функциональный усиленный закон больших чисел и функциональный закон повторного логарифма 657

Глава XXVI. Метод Стейна в оценивании близости вероятностных мер

- § 1. Введение 661
 § 2. Основы метода Стейна 664
 § 3. Метод Стейна и центральная предельная теорема с метрикой Вассерштейна 671
 § 4. О применении несмещенного каплинга и взаимозаменяемых пар при оценивании расстояний методом Стейна 673
 § 5. Метод Стейна—Чена в пуассоновской аппроксимации 679
 § 6. Метод каплинга в пуассоновской аппроксимации 682
 § 7. Некоторые замечания о «расстояниях» между вероятностными мерами 686

Глава XXVII. Предпосылки к исчислению Маллявэна. Полиномы Эрмита. Формула Мелера и гармонические осцилляторы

- § 1. Введение 693
 § 2. Интегрирование по частям. Вероятностный аспект 695
 § 3. Полная производная и производная по направлению (в \mathbb{R}^n) 699
 § 4. Операторы D , δ и L (одномерный случай). Полиномы Эрмита 700
 § 5. Разные версии и представления полиномов Эрмита. Формула Мелера 703
 § 6. Дивергентный оператор. Вероятностная формула интегрирования по частям (в \mathbb{R}^n) 711
 § 7. Физические полиномы Эрмита. Однородные классический и квантовый осцилляторы. Квантование энергии 712

Глава XXVIII. Операторы Эрмита, Мелера, Орнштейна—Уленбека. Неравенства Эфрона—Стейна, Пуанкаре и Соболева

- § 1. Об операторе L как инфинитезимальном операторе полугрупп Эрмита, Мелера, Орнштейна—Уленбека 721
- § 2. Классические неравенства Пуанкаре и неравенства Виртингера . 732
- § 3. Концентрационные неравенства (неасимптотический аспект).
Неравенство Эфрона—Стейна 735
- § 4. Гауссовское неравенство Пуанкаре 742
- § 5. Гауссовское логарифмическое неравенство Соболева—1. Введение, энтропия 748
- § 6. Гауссовское логарифмическое неравенство Соболева—2. Доказательства 752
- § 7. Некоторые применения неравенства Пуанкаре 759
- § 8. Некоторые применения логарифмического неравенства Соболева 762

Глава XXIX. О функционалах, их производных и интегралах (кратных и повторных) на винеровском пространстве

- § 1. Введение 767
- § 2. Функциональные производные (по) Фреше и (по) Гато 769
- § 3. Изонормальные гауссовские процессы 772
- § 4. О структуре L^2 -функционалов на винеровском пространстве: построение с помощью полиномов Эрмита 775
- § 5. О кратных интегралах Винера—Ито и повторных (итеративных) интегралах Ито 777
- § 6. О представлении кратных интегралов Винера—Ито с помощью полиномов Эрмита 784
- § 7. О представлении функционалов из $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)^W$ с помощью полиномов Эрмита, повторных интегралов Ито и кратных интегралов Винера—Ито 787

Глава XXX. Исчисление Маллявэна

- § 1. Производная Маллявэна для полиномиальных функционалов $F \in S$ 791
- § 2. Производная Маллявэна для элементов пополненного пространства полиномиальных функционалов ($F \in \bar{S}$) 796
- § 3. Дивергентный оператор—1 800
- § 4. Дивергентный оператор—2 804
- § 5. Стохастический интеграл Скорохода 807
- § 6. Полугруппа Орнштейна—Уленбека и ее инфинитезимальный оператор в случае винеровского пространства 812
- § 7. Сжимаемость и гиперсжимаемость полугруппы Орнштейна—Уленбека 817
- § 8. Гиперсжимаемость и логарифмическое неравенство Соболева . . 823

Глава XXXI. Некоторые приложения исчисления Маллявэна

- § 1. Формула Кларка—Окона 827

§ 2. Интегрирование по частям на винеровском пространстве и гладкость вероятностных мер	831
§ 3. О производных Маллявэна стохастических потоков, порожденных решениями стохастических дифференциальных уравнений	838
§ 4. О гладкости распределений вероятностей решений стохастических дифференциальных уравнений. Матричный критерий Маллявэна	843
§ 5. Гипоэллиптичность оператора и гладкость распределений вероятностей решений стохастических дифференциальных уравнений. Теоремы Хёрмандера и Маллявэна	847
Глава XXXII. Некоторые применения исчисления Маллявэна в финансовой математике	
§ 1. Введение	853
§ 2. Чувствительность для опционов (колл и пут) в модели Блэка—Шоулса для броуновского движения	856
§ 3. Чувствительность для опционов (колл и пут) в модели Блэка—Шоулса с фрактальным броуновским движением. Интеграл Вика	857
§ 4. О вычислении показателей чувствительности опционов в модели Блэка—Шоулса методами исчисления Маллявэна для платежных функций вида $f(S_T)$	862
§ 5. О чувствительности рациональных цен в модели Блэка—Шоулса для азиатских опционов	866
§ 6. О чувствительности цен при варьировании сноса в стохастических дифференциальных уравнениях	870
§ 7. О замене меры на фильтрованных вероятностных пространствах. Классическая и обобщенная теоремы Гирсанова	873
Глава XXXIII. Исчисление Маллявэна и метод Стейна в гауссовской аппроксимации распределений вероятностей функционалов на винеровском пространстве	
§ 1. Введение	883
§ 2. Об оценке расстояния по вариации — 1. Некоторые общие результаты	887
§ 3. Об оценке расстояния по вариации — 2. Случай кратных стохастических интегралов Винера—Ито	890
§ 4. Об оценке расстояния Колмогорова	897
Глава XXXIV. Диффузия и стохастические дифференциальные уравнения	
§ 1. Диффузия по Колмогорову (1931 г.) и диффузия по Ито (1940-е гг.)	901
§ 2. Сильные и слабые решения. Определения	905
§ 3. Примеры и контрпримеры сильных и слабых решений	909
§ 4. О существовании и единственности сильных решений	912

§ 5. О марковости решений стохастических дифференциальных уравнений	918
§ 6. О примере Танака существования слабого решения при отсутствии сильного	924
§ 7. О существовании слабых решений — 1. Метод Гирсанова	926
§ 8. О существовании слабых решений — 2. Мартингалный метод	927
§ 9. Марковские процессы, полугруппы, прямые и обратные уравнения Колмогорова для решений стохастических дифференциальных уравнений	931
§ 10. Стохастический резонанс	938
§ 11. Об одном стохастическом дифференциальном уравнении с начальным условием, зависящим от «будущего»	953
Глава XXXV. Обратные стохастические дифференциальные уравнения	
§ 1. Введение	955
§ 2. Линейные обратные стохастические дифференциальные уравнения	958
§ 3. Нелинейные обратные стохастические дифференциальные уравнения при выполнении условия Липшица — 1. Единственность	960
§ 4. Нелинейные обратные стохастические дифференциальные уравнения при выполнении условия Липшица — 2. Существование	967
§ 5. Обратное стохастическое неравенство Гронуолла и обобщенный принцип сравнения решений обратных уравнений	970
Глава XXXVI. Некоторые применения обратных стохастических дифференциальных уравнений. Нелинейные и сублинейные ожидания. Меры риска	
§ 1. Введение: о вероятностных и вероятностно-неопределенных моделях	977
§ 2. Емкость и интеграл Шоке	984
§ 3. О применении обратных стохастических дифференциальных уравнений к определению понятия нелинейного g -ожидания и использование этого понятия в случае неполных финансовых рынков	990
§ 4. О применении обратных стохастических дифференциальных уравнений к портфельным задачам финансовой математики	997
§ 5. Применение обратных стохастических дифференциальных уравнений к семилинейным параболическим дифференциальным уравнениям	1000
§ 6. Об обобщенном математическом ожидании	1002
§ 7. Нелинейное ожидание. Представление сублинейных ожиданий	1005
§ 8. О математике риска	1011
Глава XXXVII. О принципах вариационного исчисления и обратных уравнениях в детерминистических и стохастических системах	
§ 1. Введение. Исторический экскурс	1017

§ 2. О лагранжевых « δ -операциях» и об уравнении Эйлера—Лагранжа	1027
§ 3. Трансверсальность как сопутствующее условие к уравнению Эйлера—Лагранжа. Некоторые примеры	1035
§ 4. О лагранжевых « λ -множителях»	1041
§ 5. О необходимом условии Лежандра слабого минимума (в $C^1([0, T])$)	1047
§ 6. О необходимом условии Вейерштрасса сильного минимума (в $\widehat{C}^1([0, T])$)	1050
§ 7. Гамильтонова формулировка уравнения Эйлера—Лагранжа	1055
§ 8. Обобщенный гамильтониан. Условия минимума	1059
§ 9. От вариационного исчисления к проблемам оптимального управления. О принципе максимума Понтрягина	1062
§ 10. Стохастический принцип максимума — 1. Слабые управления	1069
§ 11. Стохастический принцип максимума — 2. Сильные управления	1073

Глава XXXVIII. Размерности Минковского и Хаусдорфа. Применение к броуновскому движению

§ 1. О математических понятиях размерности. Размерности самоподобия и Минковского	1081
§ 2. Мера и размерность Хаусдорфа. О верхних оценках размерности Хаусдорфа	1085
§ 3. О нижних оценках размерности Хаусдорфа	1092
§ 4. Размерность Хаусдорфа некоторых множеств, определяемых броуновским движением	1095

Глава XXXIX. О подходах к основаниям квантовой механики. Вероятностная интерпретация

§ 1. Предыстория возникновения квантовой механики	1103
§ 2. Алгебраический (матричный) подход Гейзенберга	1108
§ 3. Дифференциальный подход Шрёдингера	1111
§ 4. Интегральный подход Фейнмана	1115

Литература	1121
Обозначения	1151
Предметный указатель	1157

Том 1

Предисловие	11
Введение	13
Глава I. Броуновское движение, или винеровский процесс	
§ 1. Определения	21
§ 2. Разные свойства инвариантности броуновского движения	24
§ 3. Некоторые процессы, получаемые из броуновского движения	26

§ 4. О гауссовских (нормальных) величинах, плотностях и процессах	28
§ 5. Некоторые общие сведения о дельта-функции. Обобщенные функции	32
§ 6. Белый гауссовский шум как «производная» броуновского движения	40
§ 7. Фрактальное броуновское движение	42
Глава II. О существовании математического броуновского движения	
§ 1. Конструкция броуновского движения в виде функциональных рядов со случайными коэффициентами	45
§ 2. Теорема Колмогорова о существовании процесса с заданной системой конечномерных распределений	53
§ 3. Теорема Колмогорова о существовании непрерывной модификации	59
§ 4. Применение общих результатов о построении случайных процессов с непрерывными траекториями к вопросу о существовании броуновского движения	64
Глава III. Недифференцируемость, немонотонность и другие свойства броуновского движения	
§ 1. Недифференцируемость	69
§ 2. Немонотонность, нули и локальные экстремумы броуновского движения	72
§ 3. Вариация ($\sum \Delta B $) и квадратическая вариация ($\sum \Delta B ^2$)	75
§ 4. Некоторые траекторные свойства процесса приращений $(\Delta B_t)_{t \geq 0}$ броуновского движения. Исключительные моменты времени	80
Глава IV. Фильтрованные пространства. Моменты остановки, марковские моменты. Прогрессивная измеримость	
§ 1. Фильтрованные пространства и фильтрованные вероятностные пространства	83
§ 2. Моменты остановки, марковские моменты	86
§ 3. О σ -алгебрах, порожденных моментами остановки и марковскими моментами	94
§ 4. Необходимость введения броуновского движения на фильтрованных пространствах	98
§ 5. Законы нуля или единицы	102
§ 6. О предсказуемых, опциональных, измеримых и прогрессивно измеримых σ -алгебрах и процессах	104
Глава V. Марковское и строго марковское свойства броуновского движения	
§ 1. Марковское свойство	111
§ 2. Строго марковское свойство для броуновского движения	115
§ 3. Принцип отражения	119

§ 4. О некоторых понятиях общей теории марковских процессов	121
Глава VI. Закон повторного логарифма и законы арксинуса и арктангенса	
§ 1. Закон повторного логарифма—1. Формулировка в случае дискретного времени	125
§ 2. Закон повторного логарифма—2. Доказательство в случае дискретного времени	133
§ 3. Закон повторного логарифма для броуновского движения	138
§ 4. Законы арксинуса	141
§ 5. Законы арктангенса	146
Глава VII. Броуновский мост. Применения в математической статистике	
§ 1. Определения	151
§ 2. О распределении вероятностей броуновского моста как условном распределении броуновского движения	153
§ 3. О критериях согласия Колмогорова и Смирнова	154
§ 4. О распределениях Колмогорова и Смирнова	160
Глава VIII. Опциональность, равномерная интегрируемость. Дискретное время	
§ 1. Опциональные теоремы—1	165
§ 2. Равномерная интегрируемость	171
§ 3. Опциональные теоремы—2	177
§ 4. Основная опциональная теорема	181
Глава IX. Опциональные теоремы. Непрерывное время	
§ 1. Опциональные теоремы для мартингалов и субмартингалов	185
§ 2. Первое и второе тождества Вальда для броуновского движения	187
§ 3. Фундаментальное тождество Вальда и критерии его выполнимости	193
Глава X. Мартингалльные свойства и характеристика броуновского движения. Мартингалльные неравенства	
§ 1. Определения, примеры	199
§ 2. Мартингалльная характеристика броуновского движения. Теоремы П. Леви	202
§ 3. Теорема Гирсанова	205
§ 4. Мартингалльные неравенства	212
Глава XI. О вероятностных свойствах некоторых моментов выхода броуновского движения	
§ 1. Свойства момента остановки $\tau_a = \inf\{t \geq 0: B_t = a\}$	221
§ 2. Свойства момента остановки $\sigma_a = \inf\{t \geq 0: B_t = a\}$	224
§ 3. Свойства момента остановки $\tau_{ab} = \inf\{t \geq 0: B_t \geq a + bt\}$	228
§ 4. Свойства момента остановки $\sigma_{ab} = \inf\{t \geq 0: B_t \notin (-a + bt, a + bt)\}$	231

- § 5. Свойства моментов выхода броуновского движения на некоторые криволинейные границы 232
- § 6. О свойствах некоторых моментов остановки и распределении \sup для броуновского движения со сносом 236

Глава XII. Броуновское движение и стохастический анализ

- § 1. Стохастический интеграл по броуновскому движению с фиксированным верхним пределом. Прогрессивно измеримые процессы 241
- § 2. Стохастический интеграл по броуновскому движению с переменным верхним пределом 247
- § 3. Расширение класса интегрируемых функций (от $\mathcal{H}_2[0, T]$ к $\mathcal{L}_2[0, T]$) 252
- § 4. Формула Ито — 1. Вывод 256
- § 5. Формула Ито — 2. Эвристические рассуждения 261
- § 6. Формула Танака и локальное время броуновского движения 264
- § 7. Лемма Скорохода. Теорема Леви о совпадении распределений процессов $(\max B - B, \max B)$ и $(|B|, L)$ 269
- § 8. Обобщение теоремы Леви на случай броуновского движения со сносом 272
- § 9. О некоторых обобщениях формул Ито и Танака 276

Глава XIII. Возвратность и невозвратность случайного блуждания и броуновского движения. Время пребывания. Функция Грина броуновского движения

- § 1. Мера пребывания и локальное время броуновского движения ($d = 1$) 285
- § 2. Среднее значение меры пребывания и функция Грина для броуновского движения — 1 289
- § 3. Среднее значение меры пребывания в случае простого d -мерного случайного блуждания. Возвратность и невозвратность 292
- § 4. Возвратность и невозвратность броуновского движения в размерностях $d \geq 1$ 298
- § 5. Среднее значение меры пребывания и функция Грина для броуновского движения — 2 301

Глава XIV. Аналитические и вероятностные аспекты теории потенциала. Гармонические функции

- § 1. Исторический экскурс 309
- § 2. Классическая проблема Дирихле для оператора Лапласа 310
- § 3. Решение Пуассона задачи Дирихле на диске 314
- § 4. Гармонические, субгармонические и супергармонические функции. Свойства в среднем 319
- § 5. Следствия из свойств в среднем для гармонических функций 327
- § 6. Вероятностный подход к задаче Дирихле для оператора Лапласа 332

§ 7. Вероятностный подход к задаче Пуассона для оператора Лапласа с нулевыми граничными условиями	335
§ 8. Вероятностный подход к задаче Пуассона для оператора Лапласа с граничными условиями Неймана	337
Глава XV. Векторный анализ и векторное исчисление в теории потенциала	
§ 1. Скалярные и векторные поля, скалярное и векторное произведение, дифференциальные операторы	343
§ 2. Векторное исчисление — 1. Теоремы Ньютона—Лейбница, Гаусса—Остроградского	349
§ 3. Векторное исчисление — 2. Теоремы Грина и Стокса	353
§ 4. Первое и второе тождества Грина	361
Глава XVI. Фундаментальные решения и функции Грина	
§ 1. Фундаментальные решения	363
§ 2. Функции Грина	370
§ 3. Метод отражений — 1. Нахождение функции Грина для оператора Лапласа в полуплоскости	377
§ 4. Метод отражений — 2. Нахождение функции Грина для оператора Лапласа в шаре	379
§ 5. Фундаментальные решения и функция Грина для уравнения теплопроводности	381
Глава XVII. Стохастическая динамика Ланжевена. Процесс Орнштейна—Уленбека	
§ 1. Динамика Ланжевена	387
§ 2. Процесс Орнштейна—Уленбека	389
§ 3. О неоднородных процессах Орнштейна—Уленбека и детерминированной замене времени	395
§ 4. Оценка параметров стационарного комплексного процесса Орнштейна—Уленбека	400
Глава XVIII. Процессы Бесселя	
§ 1. Квадратичные процессы Бесселя целочисленной размерности $n \geq 1$ с нулевыми начальными условиями	403
§ 2. О распределении вероятностей квадратичного процесса Бесселя размерности $\delta \geq 0$ с произвольными начальными условиями	406
§ 3. Об обобщенной статистике $\chi^2_\delta(a)$ и еще об одном способе определения квадратичного процесса Бесселя размерности $\delta \geq 0$	412
§ 4. Процессы Бесселя	415
§ 5. Процессы Бесселя и случайная замена времени. Преобразование Ламперти	421
§ 6. Бесселевские процессы в соотношениях с равенством по распределению (теоремы Питмена, Рэя и Найта)	423

Глава XIX. О стохастических представлениях по броуновскому движению

§ 1. Сводка некоторых общих результатов об интегральных представлениях	431
§ 2. Доказательство утверждений А в теоремах 1 и 2	434
§ 3. О стохастических интегральных представлениях некоторых частичных максимумов броуновского движения	438
§ 4. Детерминированная и стохастическая замены времени. Теорема Дамбиса и Дубинса—Шварца для одномерных локальных мартингалов	446
§ 5. Теорема Найта для многомерных локальных мартингалов. Тождество Бужероля. Теорема Монро для семимартингалов	451
§ 6. Вложение Скорохода (последовательности случайных величин в броуновское движение)	454
§ 7. О некоторых преобразованиях вида $X = f \circ T + B \circ T$, представляющих интерес для математической статистики и финансовой математики	457
§ 8. О представлении гауссовских процессов, эквивалентных броуновскому движению, с помощью стохастических интегралов типа Вольтерра	460
§ 9. О представлении гауссовских процессов посредством замены времени, стохастических рядов и стохастических интегралов типа Фредгольма	463

Глава XX. О плоском (двумерном) броуновском движении и его связи с комплексным анализом

§ 1. Конформная инвариантность П. Леви	469
§ 2. Об асимптотическом поведении угловой составляющей комплексного броуновского движения. Теорема Спицера	473
§ 3. Об асимптотическом поведении аддитивных функционалов от комплексного броуновского движения. Теорема Каллианпура—Роббинса	478
§ 4. О некоторых свойствах линейного и плоского броуновских движений с переменным сносом	481
§ 5. О площади, заматаемой броуновским диском конечного радиуса. Теорема Колмогорова—Леонтовича	483

Литература 489

Обозначения 519

Предметный указатель 523