

Оглавление

Глава 1. Тензорные произведения	11
§ 1.1. Тензорное произведение модулей	11
1.1.1. Полилинейные отображения	12
1.1.2. Тензорные произведения векторных пространств	16
§ 1.2. Канонические изоморфизмы	18
§ 1.3. Тензорное произведение линейных отображений	20
§ 1.4. Образующие и соотношения	21
§ 1.5. Расширение скаляров	23
<i>Задачи для самостоятельного решения к главе 1</i>	26
Глава 2. Комплексные и вещественные векторные пространства	29
§ 2.1. Овеществление комплексного пространства	29
§ 2.2. Комплексификация вещественного пространства	31
2.2.1. Комплексное сопряжение	31
2.2.2. Комплексификация операторов	31
2.2.3. Комплексификация билинейной формы	33
2.2.4. Полуторалинейное продолжение билинейной формы	34
§ 2.3. Вещественные структуры на комплексном пространстве	36
§ 2.4. Комплексные структуры на вещественном пространстве	37
§ 2.5. Эрмитовы структуры и келеровы тройки	39
2.5.1. Келеровы тройки с заданным g	41
2.5.2. Келеровы тройки с заданным ω	43
2.5.3. Зигелево полупространство $\mathfrak{H}_n \subset \text{Mat}_n(\mathbb{C})$	44
<i>Задачи для самостоятельного решения к главе 2</i>	46
Глава 3. Эрмитовы пространства	49
§ 3.1. Эрмитова геометрия	49
3.1.1. Эрмитова норма вектора	49
3.1.2. Ортогонализация Грама — Шмидта	50
3.1.3. Неравенство Коши — Буняковского — Шварца	51
3.1.4. Унитарная группа	51
3.1.5. Эрмитов объём	52
3.1.6. Эрмитова двойственность	52

3.1.7. Ортогонал и ортогональная проекция	53
3.1.8. Угол между комплексными прямыми	54
§ 3.2. Эрмитово сопряжение линейных отображений	55
3.2.1. Эрмитово сопряжение эндоморфизмов	56
3.2.2. Нормальные операторы	57
§ 3.3. Евклидово сопряжение операторов	58
§ 3.4. Сингулярные числа и сингулярные направления	60
3.4.1. Полярное разложение	62
3.4.2. Экспоненциальное отображение	63
<i>Задачи для самостоятельного решения к главе 3</i>	64
Глава 4. Кватернионы	69
§ 4.1. Три инволюции на пространстве $\text{Mat}_2(\mathbb{C})$	69
§ 4.2. Тело кватернионов	71
4.2.1. Норма и деление	71
4.2.2. Геометрия мнимых кватернионов	72
§ 4.3. Универсальные накрытия групп SO_3 и SO_4	73
4.3.1. Универсальное накрытие $\text{SU}_2 \rightarrow \text{SO}_3$	73
4.3.2. Накрытие $\text{SU}_2 \times \text{SU}_2 \rightarrow \text{SO}_4$	76
§ 4.4. Бинарные группы платоновых тел	76
§ 4.5. Два семейства комплексных структур на \mathbb{H}	80
4.5.1. Чистые спиноры	80
4.5.2. Расслоение Хопфа	82
<i>Задачи для самостоятельного решения к главе 4</i>	83
Глава 5. Тензорная алгебра векторного пространства	87
§ 5.1. Тензорные степени	87
§ 5.2. Свёртки	88
5.2.1. Частичные свёртки	89
5.2.2. Линейный носитель тензора	90
§ 5.3. Симметрическая алгебра	91
5.3.1. Симметричные полилинейные отображения	92
5.3.2. Вычисление значения многочлена на векторе	94
§ 5.4. Внешняя алгебра	95
5.4.1. Кососимметричные полилинейные отображения	96
§ 5.5. Симметричные и знакопеременные тензоры	98
5.5.1. Стандартные базисы	98
5.5.2. Двойственность	100
5.5.3. Проекторы	101
<i>Задачи для самостоятельного решения к главе 5</i>	103
Глава 6. Поляризация многочленов	107
§ 6.1. Поляризация обычных многочленов	107

6.1.1. Производная многочлена в направлении вектора	109
6.1.2. Касательные и поляры проективной гиперповерхности	110
§ 6.2. Линейный носитель многочлена	114
§ 6.3. Поляризация грассмановых многочленов	116
6.3.1. Грассмановы частные производные	116
6.3.2. Линейный носитель грассманова многочлена	117
§ 6.4. Грассманианы	119
6.4.1. Плюккерovo вложение	120
6.4.2. Многообразие Сегре как сечение грассманиана	120
6.4.3. Однородные координаты на грассманиане	121
6.4.4. Плюккерovy координаты	121
6.4.5. Стандартное аффинное покрытие и аффинные координаты	122
6.4.6. Аффинная окрестность точки	122
6.4.7. Квадрика Плюккера в \mathbb{P}_5 и прямые в \mathbb{P}_3	123
<i>Задачи для самостоятельного решения к главе 5</i>	<i>125</i>
Глава 7. Симметрические функции	131
§ 7.1. Симметрические и знакопеременные многочлены	131
7.1.1. Мономиальный базис модуля симметрических многочленов	132
7.1.2. Детерминантные базисы	132
7.1.3. Базис Шура	133
§ 7.2. Элементарные симметрические многочлены	133
§ 7.3. Полные симметрические многочлены	134
§ 7.4. Степенные суммы Ньютона	135
7.4.1. Явное выражение e_k и h_k через p_k	136
§ 7.5. Формула Джамбелли	137
§ 7.6. Формула Пьери	139
§ 7.7. Кольцо симметрических функций	141
<i>Задачи для самостоятельного решения к главе 7</i>	<i>142</i>
Глава 8. Исчисление массивов, таблиц и диаграмм	147
§ 8.1. Массивы и элементарные операции над ними	147
8.1.1. Вертикальные операции D_j и U_j	148
8.1.2. Горизонтальные операции L_i и R_i	149
§ 8.2. Уплотнение массивов	150
8.2.1. Биplotные массивы и диаграммы Юнга	150
8.2.2. Plotные массивы и таблицы Юнга	152
8.2.3. Plotные массивы и тексты Яманучи	152
8.2.4. Послойное произведение	153

§ 8.3. Действие симметрической группы на DU-множествах	155
8.3.1. Стандартные орбиты	155
8.3.2. Действие симметрической группы $S_m = \text{Aut}(J)$	156
§ 8.4. Полиномы Шура	157
§ 8.5. Правило Литтлвуда — Ричардсона	160
8.5.1. Тождество Якоби — Труды	161
8.5.2. Выражение e_λ и h_λ через s_λ	162
§ 8.6. Скалярное произведение на модуле симметрических функций	163
<i>Задачи для самостоятельного решения к главе 8</i>	165
Глава 9. Основные понятия теории представлений	167
§ 9.1. Представления множества операторов	167
9.1.1. Разложимость, приводимость и полупростота	168
9.1.2. Гомоморфизмы представлений	171
§ 9.2. Представления ассоциативной алгебры	172
§ 9.3. Изотипные компоненты	174
§ 9.4. Представления групп	176
§ 9.5. Пример: представления конечных абелевых групп	178
9.5.1. Представление в пространстве функций на группе	179
9.5.2. Преобразование Фурье	180
§ 9.6. Пример: соответствие Шура — Вейля	181
<i>Задачи для самостоятельного решения к главе 9</i>	184
Глава 10. Представления конечных групп	187
§ 10.1. Групповая алгебра	187
10.1.1. Изотипное разложение	188
10.1.2. Скалярное произведение	192
§ 10.2. Характеры	193
10.2.1. Преобразование Фурье и функции на группе	196
10.2.2. Кольцо представлений	199
§ 10.3. (Ко)индуцирование	199
10.3.1. Индуцированные представления групп	200
10.3.2. Строение индуцированного представления	202
10.3.3. Коиндуцированные представления	204
<i>Задачи для самостоятельного решения к главе 10</i>	205
Глава 11. Представления симметрических групп	209
§ 11.1. Действие S_n на заполненных диаграммах Юнга	209
§ 11.2. Симметризаторы Юнга	211
11.2.1. Симметризаторы $s'_T = c_T r_T$	213
§ 11.3. Модуль таблоидов	214
§ 11.4. Модуль Шпехта	216

11.4.1. Табличный базис модуля Шпехта	217
§ 11.5. Кольцо представлений симметрических групп	218
11.5.1. Умножение Литтлвуда — Ричардсона в кольце \mathfrak{A}	219
11.5.2. Скалярное произведение в кольце \mathfrak{A}	220
11.5.3. Изоморфизм кольца \mathfrak{A} с кольцом симметрических функций	220
11.5.4. Размерности неприводимых представлений	224
<i>Задачи для самостоятельного решения к главе 11</i>	225
Глава 12. \mathfrak{sl}_2-модули	227
§ 12.1. Алгебры Ли	227
12.1.1. Касательные алгебры Ли линейных групп	227
12.1.2. Универсальная обёртывающая алгебра	229
12.1.3. Линейные представления	230
§ 12.2. Описание неприводимых \mathfrak{sl}_2 -модулей	231
§ 12.3. Полная приводимость \mathfrak{sl}_2 -модулей	234
<i>Задачи для самостоятельного решения к главе 12</i>	236
Глава 13. Категории и функторы	239
§ 13.1. Категории	239
13.1.1. Мономорфизмы, эпиморфизмы и изоморфизмы	241
13.1.2. Подобъекты и факторобъекты	241
13.1.3. Обращение стрелок	242
§ 13.2. Функторы	242
13.2.1. Предпучки	243
13.2.2. Функторы Hom	247
§ 13.3. Естественные преобразования	248
13.3.1. Категории функторов	249
13.3.2. Эквивалентности категорий	250
§ 13.4. Представимые функторы	251
13.4.1. Описание объектов универсальными свойствами	253
<i>Задачи для самостоятельного решения к главе 13</i>	256
Глава 14. Сопряжённые функторы и (ко)пределы	259
§ 14.1. Сопряжённые функторы	259
§ 14.2. Тензорные произведения и Hom	264
14.2.1. Тензорное умножение над кольцом	265
14.2.2. Функтор Hom_S	265
§ 14.3. (Ко)пределы диаграмм	268
§ 14.4. Фильтрующиеся диаграммы	274
§ 14.5. Функториальность (ко)пределов	277
14.5.1. Перестановочность функторов с (ко)пределами	279
<i>Задачи для самостоятельного решения к главе 14</i>	282

Глава 15. Расширения коммутативных колец	289
§ 15.1. Целые элементы	289
§ 15.2. Приложения к теории представлений	293
§ 15.3. Алгебраические элементы	295
§ 15.4. Базисы трансцендентности	297
<i>Задачи для самостоятельного решения к главе 15</i>	298
Глава 16. Аффинная алгебраическая геометрия	301
§ 16.1. Системы полиномиальных уравнений	301
§ 16.2. Аффинный алгебро-геометрический словарь	303
16.2.1. Максимальный спектр	303
16.2.2. Антиэквивалентность категорий	305
§ 16.3. Топология Зарисского	308
16.3.1. Неприводимые компоненты	309
§ 16.4. Рациональные функции	311
16.4.1. Аффинность главных открытых множеств	312
§ 16.5. Геометрические свойства гомоморфизмов алгебр	313
16.5.1. Замкнутые вложения	314
16.5.2. Доминантные морфизмы	314
16.5.3. Конечные морфизмы	315
16.5.4. Нормальные многообразия	316
<i>Задачи для самостоятельного решения к главе 16</i>	317
Глава 17. Алгебраические многообразия	321
§ 17.1. Определения и примеры	321
17.1.1. Структурный пучок и регулярные морфизмы	323
17.1.2. Замкнутые подмногообразия	324
17.1.3. Отделимость	325
17.1.4. Рациональные отображения	326
§ 17.2. Проективные многообразия	326
§ 17.3. Системы результатов	328
§ 17.4. Замкнутость проективных морфизмов	332
§ 17.5. Конечные проекции	333
§ 17.6. Размерность	335
17.6.1. Размерности подмногообразий	336
17.6.2. Размерности слоёв регулярных морфизмов	338
§ 17.7. Размерности проективных многообразий	339
<i>Задачи для самостоятельного решения к главе 17</i>	343
Глава 18. Алгебраические расширения полей	347
§ 18.1. Конечные расширения	347
18.1.1. Прimitивные расширения	347
18.1.2. Сепарабельность	349

§ 18.2. Продолжение гомоморфизмов	351
§ 18.3. Поле разложения и алгебраическое замыкание	353
§ 18.4. Нормальные расширения	355
18.4.1. Композиты	357
§ 18.5. Автоморфизмы полей и соответствие Галуа	358
<i>Задачи для самостоятельного решения к главе 18</i>	361
Глава 19. Группы Галуа	365
§ 19.1. Построения циркулем и линейкой	365
19.1.1. Влияние побочных иррациональностей	367
§ 19.2. Группы многочленов	368
19.2.1. Резольвента Галуа	370
19.2.2. Редукция коэффициентов	371
§ 19.3. Группы круговых полей	373
19.3.1. Элементы Фробениуса	373
§ 19.4. Циклические расширения	375
§ 19.5. Разрешимые расширения	377
<i>Задачи для самостоятельного решения к главе 19</i>	380
Ответы и указания к некоторым упражнениям	382
Стандартные обозначения и сокращения	402
Предметный указатель	406