

Оглавление

Предисловие	6
Глава 1. Линейные пространства	8
1.1. Линейные пространства и подпространства. Примеры . .	8
1.2. Линейная зависимость. Базис. Размерность	11
1.3. Пересечение и сумма подпространств, их размерности . .	15
1.4. Прямая сумма подпространств. Внешняя прямая сумма .	17
1.5. Факторпространство. Размерность факторпространства .	18
1.6. Координаты вектора. Закон изменения координат при замене базиса	20
1.7. Линейные отображения и изоморфизмы. Ядро и образ . .	24
1.8. Матрица линейного отображения. Преобразование мат- рицы линейного отображения при заменах базисов	26
1.9. Двойственное пространство V^* , двойственный базис. От- сутствие изоморфизма $V \cong V^*$ в бесконечномерном случае	28
1.10. Второе двойственное пространство, канонический изо- морфизм $V \cong V^{**}$	31
1.11. Сопряжённое линейное отображение	32
Глава 2. Линейные операторы	33
2.1. Матрица линейного оператора. Определитель и след опе- ратора. Невырожденные операторы. Группы $GL(n)$ и $SL(n)$	33
2.2. Проекторы, их алгебраическая характеристика	36
2.3. Многочлены от оператора. Минимальный аннулирую- щий многочлен	37
2.4. Овеществление и комплексификация	38
2.5. Инвариантные подпространства. Ограничение операто- ра и фактороператор. Собственные значения и собствен- ные векторы	42
2.6. Характеристический многочлен. Теорема Гамильтона— Кэли	44
2.7. Диагонализируемые операторы. Критерий диагонализи- руемости	48
2.8. Нильпотентные операторы. Нормальный вид	50

2.9. Корневые векторы. Теорема о разложении в прямую сумму корневых подпространств	54
2.10. Жорданова нормальная форма оператора	57
2.11. Вычисление многочленов и функций от матриц. Экспонента линейного оператора	59
Глава 3. Геометрия евклидовых и эрмитовых пространств .	63
3.1. Аффинные пространства, системы координат, подпространства	63
3.2. Евклидовы и эрмитовы пространства, примеры. Неравенство Коши—Буняковского, неравенство треугольника	65
3.3. Ортогональные системы векторов, ортонормированные базисы. Ортогонализация Грама—Шмидта	69
3.4. Ортогональные и унитарные матрицы. QR-разложение	71
3.5. Ортогональное дополнение. Проекция и ортогональная составляющая. Угол между вектором и подпространством	72
3.6. Аффинные евклидовы пространства. Расстояние от точки до подпространства. Расстояние между подпространствами	74
3.7. Определитель матрицы Грама и многомерный объём	77
3.8. Метод наименьших квадратов	80
3.9. Изоморфизмы евклидовых и эрмитовых пространств. Канонический изоморфизм евклидова пространства и его сопряжённого	82
Глава 4. Операторы в евклидовых и эрмитовых пространствах	84
4.1. Сопряжённые операторы в евклидовых и эрмитовых пространствах	84
4.2. Самосопряжённые операторы. Канонический вид	85
4.3. Самосопряжённые проекторы. Спектральное разложение самосопряжённого оператора	88
4.4. Кососимметрические и косоэрмитовы операторы. Канонический вид. Эрмитово разложение	90
4.5. Ортогональные и унитарные операторы. Канонический вид. Группы $O(n)$ и $SO(n)$, $U(n)$ и $SU(n)$	92
4.6. Положительные самосопряжённые операторы. Полярное разложение	97
4.7. Нормальные операторы	99

Глава 5. Билинейные и полуторалинейные функции	102
5.1. Билинейные и полуторалинейные функции, их матрицы. Закон изменения матрицы при замене базиса. Канонический изоморфизм пространства билинейных функций и пространства $\text{Hom}(V, V^*)$	102
5.2. Симметрические, кососимметрические и эрмитовы функции. Квадратичные формы	105
5.3. Нормальный вид симметрической билинейной функции над различными полями	106
5.4. Нормальный вид эрмитовых полуторалинейных функций	110
5.5. Закон инерции. Единственность нормального вида	111
5.6. Теорема Якоби. Критерий Сильвестра	113
5.7. Симметрические билинейные функции в евклидовых пространствах. Канонический вид	116
5.8. Приведение пары форм к диагональному виду. Собственные значения и собственные векторы пары форм	118
5.9. Нормальный вид кососимметрических билинейных функций	119
5.10. Симплектические пространства. Лагранжевы подпространства. Существование дополнительного лагранжева подпространства	122
5.11. Пространства с обобщённым скалярным произведением. Группы операторов. Псевдоевклидовы пространства.	125
Глава 6. Тензоры	129
6.1. Полилинейные функции	129
6.2. Тензоры: координатное определение	130
6.3. Тензорное произведение, свёртка, опускание и поднятие индексов	132
6.4. Базис в пространстве тензоров	135
6.5. Симметрические и кососимметрические тензоры, симметризация и альтернирование	136
6.6. Внешнее произведение кососимметрических тензоров, внешние формы	138
Теоретические задачи	142