

Оглавление

| | |
|---|----|
| Предисловие | 6 |
| Глава 1. Линейные пространства | 8 |
| 1.1. Линейные пространства и подпространства. Примеры . . | 8 |
| 1.2. Линейная зависимость. Базис. Размерность | 11 |
| 1.3. Пересечение и сумма подпространств, их размерности . . | 15 |
| 1.4. Прямая сумма подпространств. Внешняя прямая сумма . | 17 |
| 1.5. Факторпространство. Размерность факторпространства . | 18 |
| 1.6. Координаты вектора. Закон изменения координат при замене базиса | 20 |
| 1.7. Линейные отображения и изоморфизмы. Ядро и образ . . | 24 |
| 1.8. Матрица линейного отображения. Преобразование мат- рицы линейного отображения при заменах базисов | 26 |
| 1.9. Двойственное пространство V^* , двойственный базис. От- сутствие изоморфизма $V \cong V^*$ в бесконечномерном случае | 28 |
| 1.10. Второе двойственное пространство, канонический изо- морфизм $V \cong V^{**}$ | 31 |
| 1.11. Сопряжённое линейное отображение | 32 |
| Глава 2. Линейные операторы | 33 |
| 2.1. Матрица линейного оператора. Определитель и след опе- ратора. Невырожденные операторы. Группы $GL(n)$ и $SL(n)$ | 33 |
| 2.2. Проекторы, их алгебраическая характеристика | 36 |
| 2.3. Многочлены от оператора. Минимальный аннулирую- щий многочлен | 37 |
| 2.4. Овеществление и комплексификация | 38 |
| 2.5. Инвариантные подпространства. Ограничение операто- ра и фактороператор. Собственные значения и собствен- ные векторы | 42 |
| 2.6. Характеристический многочлен. Теорема Гамильтона— Кэли | 44 |
| 2.7. Диагонализируемые операторы. Критерий диагонализи- руемости | 48 |
| 2.8. Нильпотентные операторы. Нормальный вид | 50 |

| | |
|--|-----------|
| 2.9. Корневые векторы. Теорема о разложении в прямую сумму корневых подпространств | 54 |
| 2.10. Жорданова нормальная форма оператора | 57 |
| 2.11. Вычисление многочленов и функций от матриц. Экспонента линейного оператора | 59 |
| Глава 3. Геометрия евклидовых и эрмитовых пространств . | 63 |
| 3.1. Аффинные пространства, системы координат, подпространства | 63 |
| 3.2. Евклидовы и эрмитовы пространства, примеры. Неравенство Коши—Буняковского, неравенство треугольника | 65 |
| 3.3. Ортогональные системы векторов, ортонормированные базисы. Ортогонализация Грама—Шмидта | 69 |
| 3.4. Ортогональные и унитарные матрицы. QR -разложение | 71 |
| 3.5. Ортогональное дополнение. Проекция и ортогональная составляющая. Угол между вектором и подпространством | 72 |
| 3.6. Аффинные евклидовы пространства. Расстояние от точки до подпространства. Расстояние между подпространствами | 74 |
| 3.7. Определитель матрицы Грама и многомерный объём | 77 |
| 3.8. Метод наименьших квадратов | 80 |
| 3.9. Изоморфизмы евклидовых и эрмитовых пространств. Канонический изоморфизм евклидова пространства и его сопряжённого | 82 |
| Глава 4. Операторы в евклидовых и эрмитовых пространствах | 84 |
| 4.1. Сопряжённые операторы в евклидовых и эрмитовых пространствах | 84 |
| 4.2. Самосопряжённые операторы. Канонический вид | 85 |
| 4.3. Самосопряжённые проекторы. Спектральное разложение самосопряжённого оператора | 88 |
| 4.4. Кососимметрические и косоэрмитовы операторы. Канонический вид. Эрмитово разложение | 90 |
| 4.5. Ортогональные и унитарные операторы. Канонический вид. Группы $O(n)$ и $SO(n)$, $U(n)$ и $SU(n)$ | 92 |
| 4.6. Положительные самосопряжённые операторы. Полярное разложение | 97 |
| 4.7. Нормальные операторы | 99 |

| | |
|--|------------|
| Глава 5. Билинейные и полуторалинейные функции | 102 |
| 5.1. Билинейные и полуторалинейные функции, их матрицы. Закон изменения матрицы при замене базиса. Канонический изоморфизм пространства билинейных функций и пространства $\text{Hom}(V, V^*)$ | 102 |
| 5.2. Симметрические, кососимметрические и эрмитовы функции. Квадратичные формы | 105 |
| 5.3. Нормальный вид симметрической билинейной функции над различными полями | 106 |
| 5.4. Нормальный вид эрмитовых полуторалинейных функций | 110 |
| 5.5. Закон инерции. Единственность нормального вида | 111 |
| 5.6. Теорема Якоби. Критерий Сильвестра | 113 |
| 5.7. Симметрические билинейные функции в евклидовых пространствах. Канонический вид | 116 |
| 5.8. Приведение пары форм к диагональному виду. Собственные значения и собственные векторы пары форм | 118 |
| 5.9. Нормальный вид кососимметрических билинейных функций | 119 |
| 5.10. Симплектические пространства. Лагранжевы подпространства. Существование дополнительного лагранжева подпространства | 122 |
| 5.11. Пространства с обобщённым скалярным произведением. Группы операторов. Псевдоевклидовы пространства. | 125 |
| Глава 6. Тензоры | 129 |
| 6.1. Полилинейные функции | 129 |
| 6.2. Тензоры: координатное определение | 130 |
| 6.3. Тензорное произведение, свёртка, опускание и поднятие индексов | 132 |
| 6.4. Базис в пространстве тензоров | 135 |
| 6.5. Симметрические и кососимметрические тензоры, симметризация и альтернирование | 136 |
| 6.6. Внешнее произведение кососимметрических тензоров, внешние формы | 138 |
| Теоретические задачи | 142 |