Посвящается памяти
Елены Борисовны Гладковой
и Алексея Геннадьевича Мякишева

Введение

Многих любителей математики привлекают «математические софизмы». Широко известны и неоднократно публиковались «доказательства» того, что прямой угол равен тупому, что любой треугольник является равнобедренным и т. п. (см., например, [9] в списке литературы). Читателю таких текстов заранее понятно, что его обманывают, и его основная задача — найти то место в рассуждениях, где это происходит. Популярны были и книжки, в которых, наряду с софизмами, были представлены реальные ошибки школьников и студентов (см., в частности, [10] и [11]), но с момента их изданий уже прошло много времени.

Большинство текстов, опубликованных в этой книжке, более современны. Основу настоящего сборника, который выходит уже вторым изданием (существенно дополненным), по-прежнему составляют реальные задачи, в которых ошибки могут быть как в условиях, так и в ответах и решениях. Есть задачи, в которых условие корректно и даже указанный ответ верен, а ошибки (как одна, так и несколько) содержатся в приведённых решениях. В каких-то случаях приведено несколько решений, среди которых есть как верные, так и неверные. Конечно, есть и задачи с корректным условием, в которых неверное решение привело к неверному ответу, а также известные математические факты, доказательства которых содержат ошибки. Другая категория — задачи с некорректным условием, где просят доказать факт, который оказывается неверным, или числовые данные в условии несовместны и т. д. В таких случаях читателю заранее неизвестно, где именно допущены ошибки, и во многих случаях ему прежде всего требуется разобраться, корректно ли условие задачи, и если оно некорректно, то почему. Если же условие корректно, то требуется не только найти все ошибки и неточности в решениях, но и «вскрыть характер» допущенных ошибок. Кроме того, желательно самому придумать верное решение.

Многие тексты или их идеи пришли к нам из реальных занятий со школьниками, из различных олимпиад и турниров, из пособий, адресованных учащимся и учителям, но ряд текстов придуманы специально. Большинство этих сюжетов ранее было использовано на различных творческих конкурсах учителей математики (в их методической части). Для полноты картины в сборник включено и несколько «классических» текстов на поиск ошибок, которые также использовались на конкурсах учителей, но они составляют подавляющее меньшинство.

Первый раздел предлагаемой книжки включает в себя более 200 текстов, содержащих ошибки. Он разделён на три части.

1. Арифметика, алгебра и математический анализ.
2. Комбинаторика, логика, теория вероятностей.
3. Геометрия.

Внутри каждой части задания также сгруппированы по сходной тематике. Отметим, что подобное разделение весьма условно, но представляется наиболее удобным для прочтения и использования.

Второй раздел — это подсказки, которыми можно воспользоваться в случае затруднений.

Третий раздел включает в себя анализ ошибок, верные решения и комментарии.

В конце сборника приведены источники всех текстов (в той мере, в какой они известны составителю). Если это реальная задача, то указан её автор и олимпиада, на которой она была использована, а также фамилии тех коллег, которые предложили и обработали данный сюжет для какого-то из творческих конкурсов учителей. В некоторых случаях сюжет (или его основа) был найден в какой-то из публикаций и предложен для конкурса учителей, тогда указан этот источник. Во многих случаях первоисточник составителю неизвестен или же сюжет придуман непосредственно для конкурса, тогда указаны только те, кто его предложил.

Отдельно приведён список литературы и веб-ресурсов, в котором наряду с публикациями, использованными при составлении настоящего сборника, указаны книги и статьи по сходной и родственной тематике.

Составитель выражает глубокую благодарность своим коллегам, работавшим в разные годы в методической комиссии творческих конкурсов учителей, без участия которых эта книжка не могла быть написана: И. Н. Барышеву, Е. Б. Гладковой, Е. С. Горской, В. М. Гуровицу, А. В. Иванищуку, А. Г. Мякишеву, И. В. Раскиной, А. В. Хачатуряну, Д. В. Швецову, Д. Э. Шнолю, а также всем, кто пополнял его коллекцию своими сюжетами с ошибками. Среди последних — особая благодарность А. В. Грибалко, В. И. Рыжику и А. В. Шаповалову, а также Ю. Блинкову, И. Зубкову, Д. Калинину, П. Кожевникову, Д. Мухину, В. Радионову, А. Сгибневу, К. Столбову, Ю. Эдлину.

I. Тексты с ошибками

Арифметика, алгебра и математический анализ

Делимость и целые числа

1. В Книге рекордов Гиннесса написано, что наибольшее известное простое число равно $23021^{377}-1$. Не опечатка ли это?

2. В одном из печатных источников было опубликовано решение знаменитой открытой проблемы о простых числах-близнецах.

Теорема. *Пар простых чисел, отличающихся на 2, бесконечно много.*

Доказательство. Евклид доказал, что, какое бы простое число p мы ни взяли, найдётся простое число $q=2\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot p+1>p$, то есть наибольшего простого числа не существует.

Рассмотрим число $r=2\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot p-1$, которое также является простым и отличается на 2 от q, то есть (r,q) — пара простых чисел-близнецов. Но значений p бесконечно много, значит, таких пар бесконечно много.

3. Найдите два натуральных числа, сумма которых равна 119, а разность квадратов — простое число.

Ответ: 60 и 59.

Решение. Пусть a и b — искомые числа, тогда $a+b=119$ и число a^2-b^2 простое. Так как $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$, должно выполняться равенство $a-b=1$. Решая систему уравнений

$$\begin{cases} a+b=119,\\ a-b=1,\end{cases}$$

получим, что $a=60$, $b=59$.

4. Сколько существует натуральных чисел, меньших 200, имеющих ровно четыре делителя и делящихся на 5?

Ответ: 10.

Решение. У любого числа два делителя определяются однозначно: 1 и само число. Третий делитель по условию равен 5. Значит, четвёртый должен быть простым числом: 3, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37. Таким образом, искомых чисел ровно 10.

5. Делитель натурального числа называется собственным, если он не равен этому числу и единице. Найдите все натуральные числа, у которых самый большой собственный делитель в 7 раз больше самого маленького собственного делителя.

Ответ: все натуральные числа вида $7q^2$, где q — простое число.

Решение. Наименьший собственный делитель любого натурального числа — простое число, иначе оно не наименьшее. Если m — наибольший, а q — наименьший собственный делитель числа N, то $N = mq$. По условию $m = 7q$, значит, $N = 7q^2$.

6. Сумма трёх натуральных чисел равна 520. На какое наибольшее число нулей может оканчиваться их произведение?

Ответ: на пять нулей.

Решение. Пример. $400 + 100 + 20 = 520$, $400 \cdot 100 \cdot 20 = 800\,000$.

Оценка. Посмотрим, сколько пятёрок может быть в разложении произведения на простые множители. Все слагаемые не могут делиться на 25, так как сумма на 25 не делится. Если два слагаемых делятся на 25, то третье даст в разложении не более чем одну пятёрку, поэтому всего в разложении будет не больше пяти пятёрок. Значит, и нулей не более пяти.

7. Можно ли число 197 представить в виде суммы двух натуральных чисел с одинаковой суммой цифр?

Ответ: нельзя.

Решение 1. Попробуем представить число 197 в виде суммы двух чисел, начиная с суммы $196 + 1$. Видим, что суммы цифр данных чисел не равны. Теперь будем отнимать от первого числа по единице и прибавлять единицу ко второму, чтобы сумма сохранялась. Увидим, что, как бы мы ни разбивали 197 на два целых числа, сумма цифр этих чисел всегда будет равняться 17. Пусть в одном из чисел суммы сумма цифр равна m, тогда сумма цифр второго числа $17 - m$. Они равны, если $m = 17 - m$, откуда получаем, что $m = 8{,}5$. Но m — целое число, следовательно, получили противоречие.

Таким образом, 197 нельзя представить в виде суммы двух чисел с одинаковой суммой цифр.

Решение 2. Пусть $197=\overline{xyz}+\overline{ab}$ (понятно, что получить 197, складывая два трёхзначных числа, невозможно, а сумма чисел 98 и 99 не обладает требуемым свойством). Тогда

$$197 = 100x + 10(y+a) + (z+b),$$

откуда получаем, что $x=1$, $y+a=9$, $z+b=7$. Значит, одно из чисел y и a нечётно, а другое чётно. Аналогично для чисел z и b. Если суммы цифр слагаемых равны, то $x+y+z=a+b$, то есть $x+y+z-a-b=0$. Но алгебраическая сумма трёх нечётных и двух чётных чисел не может быть равна нулю.

Таким образом, 197 нельзя представить в виде суммы двух чисел с одинаковой суммой цифр.

8. На доске записано натуральное число. Петя разделил его на 7 и записал неполное частное и остаток. Вася разделил это же число на 8 и также записал неполное частное и остаток. Оказалось, что у Васи записаны такие же числа, как у Пети. Какое число было записано на доске?

Ответ: 55.

Решение. Пусть Петя записал частное m и остаток n. У Васи не могло быть записано такое же частное и такой же остаток, поэтому он записал частное n, а остаток m. Тогда

$$7m+n = 8n+m \iff 6m = 7n.$$

Числа m и n одновременно не равны нулю, $7n$ делится на 6, значит, n делится на 6, то есть $n=6$, тогда $m=7$. Следовательно, на доске записано число 55.

9. Петя сложил все трёхзначные натуральные числа, в записи которых есть цифра 5. Сёма сложил все трёхзначные натуральные числа, в записи которых есть цифра 7. На сколько Сёмина сумма больше Петиной?

Ответ: на 21 980.

Решение. Заметим, что если в слагаемых Петиной суммы заменить все пятёрки на семёрки, то получится как раз Сёмина сумма. Будем делать такую замену постепенно. Сначала заменим на семёрки все пятёрки в разряде сотен. Таких чисел у Пети было ровно 100 — от 500 до 599. Каждое из них увеличилось на 200, значит, сумма выросла на $200\cdot 100=20\,000$. Теперь заменим на семёрки все пятёрки в разряде десятков. В каждой сотне было по 10 замен, сотен — 9, каждая замена увеличила число на 20, поэтому сумма увеличится на $9 \cdot 10 \cdot 20 = 1800$. Наконец, заменим на семёрки все пятёрки в разряде единиц. В каждом десятке будет одна замена, таких десятков — $9 \cdot 10 = 90$, значит, сумма увеличится на $90 \cdot 2 = 180$. Итого мы увеличили Петину сумму на $20\,000 + 1800 + 180 = 21\,980$ и получили сумму Сёмы.

10. Натуральные числа a и b удовлетворяют соотношению

$$2a^2 + a = 3b^2 - b.$$

Докажите, что $a + b$ точный квадрат.

Решение. Перенося $2b^2 - b$ в левую часть равенства, получим, что $2(a^2 - b^2) + a + b = b^2$, то есть $(a+b)(2a - 2b + 1) = b^2$. Осталось заметить, что числа $a + b$ и $2a - 2b + 1$ взаимно просты, следовательно, каждое из них — точный квадрат.

11. Докажите, что квадрат натурального числа при делении на 4 не может давать остаток 3.

Решение. Квадраты натуральных чисел являются ординатами точек параболы $y = x^2$ с целыми абсциссами. Натуральные числа, которые дают остаток 3 при делении на 4, являются ординатами точек прямой $y = 4x + 3$ с целыми абсциссами. Так как оба условия должны выполняться одновременно, то $x^2 = 4x + 3$. Но это уравнение не имеет целых корней.

12. Сколько квадратов натуральных чисел содержится среди чисел вида $2^n + 4^k$, где n и k — натуральные числа?

Ответ: ни одного.

Решение. Пусть $2^n + 4^k = x^2$, тогда x — чётное число, поэтому x^2 делится на 4. Значит, n также чётное число, то есть $n = 2m$.

Пусть $m \geqslant k$, тогда

$$2^n + 4^k = 4^m + 4^k = 4^k(4^{m-k} + 1).$$

Но 4^k является квадратом натурального числа, а число в скобках квадратом не является. Случай $m < k$ рассматривается аналогично.

13. Натуральные числа от 1 до 37 удалось поставить в ряд без повторений так, что каждое число, начиная с третьего, является делителем суммы всех предыдущих. Известно, что первые два числа — это 37 и 1. Какое число может стоять на третьем месте?

Ответ: 2 или 19.

Решение. Сумма двух первых чисел равна 38. Третье число должно быть делителем числа 38, но $38 = 1 \cdot 38 = 2 \cdot 19$, причём число 1 уже использовано, а числа 38 в ряду нет. Следовательно, на третьем месте стоит либо 2, либо 19.

14. Натуральное число разрешено увеличивать на любое целое число процентов от 1 до 100, если при этом получается также натуральное число. Найдите наименьшее натуральное число, которое нельзя при помощи таких операций получить из числа 1.

Ответ: 203.

Решение. Сначала научимся получать числа от 2 до 200. Из числа 1 можно получить 2, увеличив его на 100 %. Из числа 2 можно получить 3 и 4, увеличив его на 50 % и 100 % соответственно. Из числа 4 можно получить 5, увеличив его на 25 %. Из числа 5 можно получить любое число от 6 до 10, увеличивая его на число процентов, кратное двадцати. Из числа 10 можно получить любое число от 11 до 20, увеличивая его на число процентов, кратное десяти. Аналогично из числа 20 можно получить любое число от 21 до 25, из числа 25 — числа от 26 до 50, из числа 50 — от 51 до 100, из числа 100 — от 101 до 200.

Далее, число 201 — это число 134, увеличенное на 50 %, а число 202 — увеличенное на 1 % число 200. Докажем, что простое число 203 получить нельзя. В самом деле, если 203 получено из числа m увеличением на n процентов, то $203 = m + \frac{mn}{100}$. Тогда $20\,300 = m(100 + n)$. Один из сомножителей правой части делится на 203. Так как $m < 203$, на 203 делится $100 + n$. Но тогда мы увеличивали m на $n > 100$ процентов — противоречие.

15. На какое наибольшее натуральное число делится $n^4 - 1$, где n — произвольное простое число, большее пяти?

Решение 1. Выполним преобразования:

$$n^4 - 1 = (n^2 + 1)(n + 1)(n - 1).$$

Тогда это число делится на 3, так как из трёх чисел $n - 1$, n и $n + 1$ одно должно делиться на 3, а простое число n, большее пяти, на 3 делиться не может. Кроме того, n — нечётное число, следовательно, каждый из трёх сомножителей чётный, то есть $n^4 - 1$ делится на 8. При этом $n - 1$ и $n + 1$ — последовательные чётные числа, значит, одно из них делится на 4. Заметим, что $n^2 + 1$ не обязательно делится на 4, что легко проверить, подставив, например, $n = 7$.

Таким образом, данное число делится на 3, 8 и 4, то есть делится на 96.

Решение 2. Заметим, что число n может оканчиваться цифрами 1, 3, 7 или 9, значит, n^4 оканчивается цифрой 1, поэтому n^4-1 оканчивается нулём, то есть делится на 10. Применив малую теорему Ферма, получим, что данное число делится на 5. Кроме того, так как при делении на 2 число n даёт остаток 1, то n^4 при делении на 2^4 также даёт остаток 1, то есть n^4-1 делится на $2^4=16$.

Таким образом, данное число делится на 10, 5 и 16, то есть делится на 800.

16. При каких целых значениях n выражение $\frac{3n^2-4n-17}{n-3}$ принимает натуральные значения?

Ответ: при $n=4$ или $n=5$.

Решение. Разделим числитель на знаменатель «в столбик». Получим $\frac{3n^2-4n-17}{n-3}=3n+5-\frac{2}{n-3}$. Значение выражения будет натуральным, если знаменатель полученной дроби является делителем числителя, то есть $n-3=1$ или $n-3=2$. Таким образом, $n=4$ или $n=5$.

17. Существует ли конечная геометрическая прогрессия с натуральными членами, сумма всех членов которой равна 211?

Ответ: не существует.

Решение. Пусть x — первый член, а q — знаменатель прогрессии, тогда $x(1+q+q^2+\ldots+q^n)=211$. Так как 211 — простое число, $x=1$. Значит,

$$q(1+q+\ldots+q^{n-1}) = 210 = 2\cdot3\cdot5\cdot7.$$

Следовательно, в разложении числа q на простые множители могут присутствовать только числа 2, 3, 5 и 7 (либо в первой, либо в нулевой степени).

Пусть $q=2$, тогда

$$1+2+\ldots+2^{n-1} = 105 \iff 2^n-1 = 105 \iff 2^n = 106,$$

что невозможно.

Пусть $q=3$, тогда $1+3+\ldots+3^{n-1}=70$. Так как $3^4=81>70$, достаточно проверить $n=2$; 3; 4. Во всех случаях равенство неверно.

Пусть $q=5$, тогда $1+5+\ldots+5^{n-1}=42$. Так как $5^3=125>42$, достаточно проверить $n=2$ и $n=3$. В обоих случаях равенство неверно.

Пусть $q\geqslant 6$, тогда $1+q+\ldots+q^{n-1}\leqslant 35$, но $q^2\geqslant 36$, поэтому ни при каких натуральных n, бо́льших двух, неравенство $1+q+\ldots$ $\ldots+q^{n-1}\leqslant 35$ выполняться не может.