

Оглавление

Предисловие	6
ЧАСТЬ 1	
Основные сведения из школьной геометрии	8
П л а н и м е т р и я	8
1. Признаки равенства треугольников. 2. Основные свойства и признаки равнобедренного треугольника. 3. Теорема о серединном перпендикуляре. 4. Признаки и свойства параллельных прямых. 5. Теорема о сумме углов треугольника и следствия из неё. 8. Признаки равенства прямоугольных треугольников. 9. Теорема о биссектрисе угла. 10. Прямоугольный треугольник с углом 30° . 11. Геометрические неравенства. 12. Параллелограмм. 13. Прямоугольник. 14. Ромб. 15. Квадрат. 16. Теорема Фалеса. 17. Средняя линия треугольника. 18. Свойство середин сторон четырёхугольника. 19. Теорема о медианах треугольника. 20. Медиана прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла. 21—22. Трапеция. 23. Окружность. 24. Свойство серединных перпендикуляров к сторонам треугольника. 27. Теорема о высотах треугольника. 28. Касательная к окружности. 31. Касающиеся окружности. 32. Углы, связанные с окружностью. 33. Вписанный четырёхугольник. 34. Описанная трапеция. 35. Теорема о пропорциональных отрезках. 36. Подобие. Признаки подобия треугольников. 37. Свойство биссектрисы треугольника. 38. Пропорциональные отрезки в окружности. 39. Тригонометрические соотношения в прямоугольном треугольнике. 40. Метрические соотношения в прямоугольном треугольнике. 41. Метрические соотношения в треугольнике. 42. Формулы площади треугольника. 43. Элементы равностороннего треугольника. 44. Формулы площади параллелограмма, трапеции, выпуклого четырёхугольника. 45. Отношение площадей. 46. Длина окружности, дуги окружности. Площадь круга. 47—65. Задачи на построение с помощью циркуля и линейки.	
С т е р е о м е т р и я	21
66. Факты, непосредственно связанные с аксиомами. 67. Прямая, параллельная плоскости. 68. Параллельные прямые в пространстве. 69. Параллельные плоскости. 70. Свойства граней и диагонали параллелепипеда. 71. Скрещивающиеся прямые. 72. Свойства параллельного проектирования. 73. Перпендикуляр к плоскости. 74. Двугранный угол. 75. Трёхгранный угол. Многогранный угол. 77—84. Сфера. Касательная плоскость. Касательная прямая. Касающиеся сферы. 85—87. Правильная пирамида. 88. Боковая поверхность призмы и пирамиды. 89. Объёмы многогранников. 90. Объёмы тел вращения. 91. Поверхности тел вращения. 92—104. Координаты и векторы в пространстве. 100. Свойства скалярного произведения векторов.	

Избранные теоремы и задачи элементарной геометрии	31
П л а н и м е т р и я	31
I. Геометрические неравенства. Задачи на максимум и минимум	31
105—119. Основные факты. 106. Неравенство треугольника. 120—136. Задачи на построение и доказательство. 121. Задача Герона. 124. Задача Фаньяно. 125. Задача Ферма. 135. Неравенство Эрдёша.	
II. Сумма углов треугольника. Средняя линия треугольника. Параллелограммы, трапеции. Биссектриса. Медиана прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла	35
137—149. Основные факты. 137. Угол между биссектрисами треугольника. 144. Теорема Вариньона. 150—160. Задачи на построение. 161—170. Задачи на доказательство. 171—176. Задачи на вычисление.	
III. Окружность. Углы, связанные с окружностью. Вспомогательная окружность	40
177—201. Основные факты. 177. Углы, связанные с окружностью. 178. Критерии принадлежности четырёх точек одной окружности. 185. Теорема Помпею. 186. Точка Торичелли. 187. Теорема о трилистнике. 188. Формула Эйлера. 190. Прямая Эйлера. 192. Теорема Нагеля. 193. Теоремы об ортотреугольнике. 195. Теорема Мансиона. 196. Задача Архимеда. 197. Теорема Штейнера—Лемуса. 198. Окружность девяти точек. 199. Прямая Симсона. 200. Точка Микеля. 202—210. Задачи на построение. 211—216. Задачи на доказательство. 217—222. Задачи на вычисление.	
IV. Касательная к окружности. Касающиеся окружности	48
223—230. Основные факты. 229. Теорема Коперника. 230. Лемма Архимеда. 231—233. Задачи на GMT и построение. 234—242. Задачи на доказательство и вычисление.	
V. Подобие. Отношение отрезков. Пропорциональные отрезки в окружности	51
243—255. Основные факты. 243. Теорема о пропорциональных отрезках на параллельных прямых. 244. Замечательное свойство трапеции. 246. Обобщённая теорема Пифагора. 248. Теорема Менелая. 249. Теорема Чевы. 250. Прямая Гаусса. 251. Точка Жергона. Точка Нагеля. 253. Окружность Аполлония. 255. Задача о бабочке. 256—259. Задачи на построение. 260—270. Задачи на доказательство. 271—278. Задачи на вычисление.	
VI. Площадь. Отношение площадей. Метод площадей	57
280—288. Основные факты. 280. Некоторые формулы площади треугольника. 281. Задача Люилье. 287. Формула для биссектрисы треугольника по двум сторонам и углу между ними. 289—290. Задачи на построение и GMT. 291—295. Задачи на доказательство. 296—298. Задачи на вычисление.	
VII. Вписанные и описанные четырёхугольники	60
299—307. Основные факты. 299. Признак описанного четырёхугольника. 300. Свойства вписанного четырёхугольника с перпендикулярными диагоналями. 301. Теорема Монжа. 302. Формула Брахмагупты. 304. Теорема Ньютона. 306. Теорема Птолемея. 308—309. Задачи на доказательство. 310—312. Задачи на вычисление.	

VIII. Геометрические преобразования	62
313—320. Основные факты. 317. Теорема о композиции поворотов. 318. Теорема о центрах трёх гомотетий. 320. Теорема Шаля. 321—336. Задачи на построение. 337—345. Задачи на доказательство и вычисление. 341. Треугольники Наполеона.	
Стереометрия	67
I. Прямые и плоскости в пространстве. Параллельность в пространстве. Построения на проекционном чертеже. Вычисление отношений отрезков	67
346—351. Основные факты. 352—359. Задачи на построение. 360—370. Задачи на вычисление.	
II. Перпендикулярность в пространстве. Теорема о трёх перпендикулярах. Углы в пространстве. Расстояние между скрещивающимися прямыми	70
371—384. Основные факты. 382. Формула Лейбница. 383. Теорема косинусов для тетраэдра. 384. Уравнение плоскости «в отрезках». Параметрические уравнения прямой. Расстояние от точки до плоскости, заданной уравнением. 385—390. Задачи на доказательство. 391—410. Задачи на вычисление.	
III. Сфера, описанная около многогранника. Сфера, вписанная в многогранник	76
411—413. Основные факты. 414—421. Задачи на вычисление.	
IV. Виды тетраэдров	78
422—427. Основные факты. 422. Равногранный тетраэдр. 423—424. Ортоцентрический тетраэдр. 424. Прямая Эйлера ортоцентрического тетраэдра. 425—426. Прямоугольный тетраэдр. 425. Обобщённая теорема Пифагора. 427. Каркасный тетраэдр. 428—433. Задачи на доказательство. 434—440. Задачи на вычисление.	
V. Объём многогранника. Отношение объёмов. Метод объёмов	82
441—446. Основные факты. 447—448. Задачи на доказательство. 449—462. Задачи на вычисление.	
VI. Круглые тела. Комбинации круглых тел и многогранников. Объём и площадь поверхности	85
463—464. Основные факты. 463. Принцип Кавальери. 464. Поверхность шарового слоя. 465—466. Задачи на построение и доказательство. 467—483. Задачи на вычисление.	
VII. Геометрические неравенства. Задачи на максимум и минимум	89
484—487. Основные факты. 484. Теорема об угле прямой с плоскостью. 487. Теорема косинусов для трёхгранного угла. 488—494. Задачи на доказательство. 495—500. Задачи на вычисление.	
Ответы и указания	92
ПРИЛОЖЕНИЕ	
Соответствие номеров задач в книге и системе «Задачи по геометрии» http://zadachi.mccme.ru/	96

Предисловие

В первой части этой книги перечислены основные теоремы школьного курса геометрии и некоторые ключевые факты, которые будут полезны тем школьникам, которые добросовестно учатся в школе и хотели бы научиться решать более-менее содержательные геометрические задачи. Все эти факты не выходят за пределы школьной программы и содержатся практически в любом школьном учебнике (иногда в виде задач). Первая часть может служить памяткой по геометрии при подготовке к ГИА и ЕГЭ.

Вторая часть состоит из задач повышенной трудности. Это

- а) известные классические задачи и теоремы элементарной геометрии, не вошедшие в школьные учебники;

- б) красивые задачи математических олимпиад разных уровней;

- в) задачи, содержащие ключевые идеи;

- г) некоторые ставшие довольно популярными задачи, в разные годы предлагавшиеся на вступительных экзаменах в вузы с повышенными требованиями по математике (МГУ, МФТИ, МИФИ и т. д.);

- д) просто интересные и красивые геометрические задачи, которые традиционно предлагаются на занятиях различных математических кружков.

Задачи второй части могут быть рекомендованы тем школьникам, которые проявляют повышенный интерес к геометрии, любят решать геометрические задачи. При необходимости подробные решения большинства из них можно найти в известных книгах:

- 1) *Адамар Ж.* Элементарная геометрия. Ч. I: Планиметрия. — М.: ОГИЗ, 1948.

- 2) *Готман Э. Г., Скопец З. А.* Решение геометрических задач аналитическим методом. — М.: Просвещение, 1979.

- 3) *Делоне Б. Н., Житомирский О. К.* Задачник по геометрии. — М.—Л.: ГИТТЛ, 1950.

4) *Зетель С. И.* Новая геометрия треугольника. — М.: Учпедгиз, 1962.

5) *Коксетер Г. С. М., Грейтцер С. Л.* Новые встречи с геометрией. — М.: Наука, 1978. — (Библиотека математического кружка; вып. 14).

6) *Понарин Я. П.* Элементарная геометрия. Т. 1: Планиметрия, преобразования плоскости. — М.: МЦНМО, 2018.

7) *Прасолов В. В.* Задачи по планиметрии. — М.: МЦНМО, 2019.

8) *Прасолов В. В., Шарыгин И. Ф.* Задачи по стереометрии. — М.: Наука, 1989. — (Библиотека математического кружка; вып. 19).

9) *Пржевальский Е.* Собрание геометрических теорем и задач. — М., 1909.

10) *Ткачук В. В.* Математика — абитуриенту. — М.: МЦНМО, 2019.

11) Методическое пособие по математике для учащихся старших классов и абитуриентов / Под ред. М. И. Шабунина. — М.: Физматкнига, 2013.

12) *Шарыгин И. Ф.* Геометрия 9—11: От учебной задачи к творческой. — М.: Дрофа, 1996.

13) *Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М.* Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Ч. 2: Геометрия (планиметрия); Ч. 3: Геометрия (стереометрия). — М.: ГИТТЛ, 1954. — (Библиотека математического кружка; вып. 2 и 3).

14) Сборник методических материалов письменных испытаний по математике и физике абитуриентов Московского Физтеха (1947—2006 гг.). Математика / Под ред. И. Г. Шомполова. — М.: МФТИ, 2007.

15) Журнал «Квант».

При подборе задач использована Информационно-поисковая система «Задачи по геометрии» (<http://zadachi.mcsme.ru/>), созданная Московским математическим центром под руководством И. Ф. Шарыгина, а также сотрудниками и учениками московской школы № 57. Система также содержит решения большинства из предложенных задач (соответствие номеров задач в книге и задач в системе приведено в приложении на с. 96).

Выражаю искреннюю благодарность М. Ю. Панову, М. Г. Быковой и С. Е. Посицельскому, чьи советы и замечания оказали мне большую помощь при подготовке этого издания.

Р. К. Гордин