

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	9
Введение	11
Глава I. Предварительные сведения	18
§ 1. Группы Ли и алгебры Ли	18
1.1. Группы Ли и бесконечномерная постановка задачи	18
1.2. Алгебра Ли группы Ли	20
1.3. Экспоненциальное отображение	23
1.4. Абстрактные алгебры Ли	27
§ 2. Присоединённые и коприсоединённые орбиты	31
2.1. Присоединённое представление	31
2.2. Коприсоединённое представление	33
§ 3. Центральные расширения	36
3.1. Центральные расширения алгебр Ли	36
3.2. Центральные расширения групп Ли	39
§ 4. Уравнения Эйлера для групп Ли	42
4.1. Пуассоновы структуры на многообразиях	42
4.2. Уравнения Гамильтона на пространстве, двойственном к алгебре Ли	44
4.3. Риманов подход к уравнениям Эйлера	46
4.4. Пуассоновы пары и бигамильтоновы структуры	52
4.5. Интегрируемые системы и теорема Лиувилля—Арнольда	55
§ 5. Симплектическая редукция	59
5.1. Гамильтоновы действия групп	59
5.2. Симплектические факторы	61
§ 6. Библиографические замечания	64
Глава II. Бесконечномерные группы Ли: их геометрия, орбиты и динамические системы на них	66
§ 1. Группы петель и аффинные алгебры Ли	66
1.1. Центральное расширение алгебры петель	66

1.2.	Коприсоединённые орбиты аффинных групп Ли . . .	71
1.3.	Построение центрального расширения группы петель	80
1.4.	Библиографические замечания	87
§ 2.	Диффеоморфизмы окружности и группа Вирасоро—Ботта	90
2.1.	Центральные расширения	90
2.2.	Коприсоединённые орбиты группы диффеоморфизмов окружности	94
2.3.	Коприсоединённое действие Вирасоро и операторы Хилла	97
2.4.	Группа Вирасоро—Ботта и уравнение Кортвега — де Фриза	105
2.5.	Бигамильтонова структура уравнения КдФ	108
2.6.	Библиографические замечания	112
§ 3.	Группы диффеоморфизмов	114
3.1.	Группа сохраняющих объёмы диффеоморфизмов и её коприсоединённое представление	114
3.2.	Уравнение Эйлера идеальной несжимаемой жидкости	116
3.3.	Гамильтонова структура и первые интегралы уравнений Эйлера для несжимаемой жидкости	118
3.4.	Полупрямые произведения: групповая структура идеальной магнитной гидродинамики и динамики сжимаемых жидкостей	122
3.5.	Симплектическая структура на пространстве узлов и уравнения Ландау—Лифшица	127
3.6.	Группы диффеоморфизмов как метрические пространства	134
3.7.	Библиографические замечания	139
§ 4.	Группа псевдодифференциальных символов	141
4.1.	Алгебра Ли псевдодифференциальных символов . . .	141
4.2.	Внешние дифференцирования и центральные расширения алгебры Ли ψDS	143
4.3.	Тройка Манина псевдодифференциальных символов	147
4.4.	Группа Ли дробных псевдодифференциальных символов	150
4.5.	Экспоненциальное отображение для псевдодифференциальных символов	153
4.6.	Пуассоновы структуры на группе дробных псевдодифференциальных символов	156
4.7.	Интегрируемые иерархии на группе Пуассона—Ли \tilde{G}_{INT}	162
4.8.	Библиографические замечания	165

§ 5. Группы двойных петель и эллиптические группы Ли . . .	167
5.1. Центральные расширения групп двойных петель и их алгебр Ли	167
5.2. Коприсоединённые орбиты	170
5.3. Группы голоморфных петель и монодромия	172
5.4. Отступление: определение систем Калоджеро—Мозера	177
5.5. Тригонометрическая система Калоджеро—Мозера и аффинные алгебры Ли	181
5.6. Эллиптическая система Калоджеро—Мозера и эллиптические алгебры Ли	184
5.7. Библиографические замечания	189

Глава III. Приложения бесконечномерных групп: топологические и голоморфные калибровочные теории 191

§ 1. Голоморфные расслоения и системы Хитчина	191
1.1. Основы теории голоморфных расслоений	191
1.2. Системы Хитчина	196
1.3. Библиографические замечания	200
§ 2. Пуассоновы структуры на пространствах модулей	201
2.1. Пространства модулей плоских связностей над римановыми поверхностями	201
2.2. Вычет Пуанкаре и формула Коши—Стокса	210
2.3. Пространства модулей голоморфных расслоений	213
2.4. Библиографические замечания	220
§ 3. Вокруг функционала Черна—Саймонса	222
3.1. Напоминание о лагранжевом формализме	222
3.2. Топологический функционал действия Черна—Саймонса	227
3.3. Голоморфный функционал действия Черна—Саймонса	231
3.4. Напоминание о коэффициентах зацепления	233
3.5. Континуальный интеграл для абелевой теории Черна—Саймонса и коэффициент зацепления	237
3.6. Библиографические замечания	241
§ 4. Полярные гомологии	243
4.1. Введение в полярные гомологии	243
4.2. Полярные гомологии проективных многообразий	249
4.3. Полярные пересечения и зацепления	254
4.4. Полярные гомологии аффинных кривых	257
4.5. Библиографические замечания	260

Добавления	262
§ А.1. Системы корней	262
1.1. Конечные системы корней	262
1.2. Полупростые комплексные алгебры Ли	264
1.3. Аффинные и эллиптические системы корней	265
1.4. Системы корней и гамильтонианы Калоджеро—Мозера	268
§ А.2. Компактные группы Ли	270
2.1. Структура компактных групп Ли	270
2.2. Порождающий коцикл для когомологий простой компактной группы	273
§ А.3. Алгебры Кричевера—Новикова	275
3.1. Голоморфные векторные расслоения на \mathbb{C}^* и алгебра Вирасоро	275
3.2. Определение алгебр Кричевера—Новикова и обобщенная градуировка	276
3.3. Центральные расширения	279
3.4. Аффинные алгебры Кричевера—Новикова, коприсоединённые орбиты и голоморфные расслоения	282
§ А.4. Кэлеровы структуры на коприсоединённых орбитах группы Вирасоро и групп петель	286
4.1. Кэлерова геометрия однородного пространства $\text{Diff}(S^1)/S^1$	286
4.2. Действие группы $\text{Diff}(S^1)$ и кэлерова геометрия на пространстве отмеченных петель	290
§ А.5. Группы диффеоморфизмов и оптимальный перенос массы	294
5.1. Невязкое уравнение Бюргерса как уравнение геодезических на группе диффеоморфизмов	294
5.2. Метрика на пространстве плотностей и исчисление Отто	298
5.3. Гамильтоново описание римановой субмерсии	303
§ А.6. Метрики и диаметры групп гамильтоновых диффеоморфизмов	306
6.1. Метрика Хофера и биинвариантные псевдометрики на группе гамильтоновых диффеоморфизмов	306
6.2. Бесконечность L^2 -диаметра группы гамильтоновых диффеоморфизмов	308
§ А.7. Полупрямые расширения группы диффеоморфизмов и газодинамика	313
§ А.8. Редукция Дринфельда—Соколова	317
8.1. Конструкция Дринфельда—Соколова	317

8.2. Теорема Купершмидта—Вилсона и доказательства . . .	320
§ A.9. Алгебра Ли \mathfrak{gl}_∞	326
9.1. Алгебра Ли \mathfrak{gl}_∞ и её подалгебры	326
9.2. Центральное расширение алгебры Ли \mathfrak{gl}_∞	328
9.3. q -разностные операторы и алгебра Ли \mathfrak{gl}_∞	329
§ A.10. Торические действия на пространстве модулей плоских связностей	332
10.1. Коммутирующие функции на пространстве модулей .	332
10.2. Случай $SU(2)$	334
10.3. $SL(n, \mathbb{C})$ и рациональная система Рейсенарса— Шнайдера	338
Литература	341
Предметный указатель	365