Введение

Многообразия (в частности, гладкие многообразия) являются одним из главных объектов изучения в математике. Именно на языке многообразий удобно описывать фундаментальные законы естествознания. В этой книге мы излагаем основные конструкции теории многообразий. Книга начинается с известных многим еще со школы основ математического анализа и заканчивается актуальными проблемами современной математики. Большинство центральных утверждений приводится с полными доказательствами. Многочисленные упражнения являются важной частью книги.

Определение гладкого многообразия выкристаллизовывалось в течение почти ста лет, начиная с середины XIX века. Гладкое многообразие можно представлять себе как гладкую фигуру в многомерном пространстве. Примерами таких многообразий могут служить поверхность Земли или более сложные поверхности, например, типа тора. Однако изучать многообразия и функции на них значительно сложнее, чем привычное пространство $\mathbb{R}^n$ и функции на нем. Это связано с тем, что обычно на многообразии (например, на сфере) не существует глобальной системы координат. Многообразие определяется как геометрический объект, склеенный из отдельных карт, т. е. кусков пространства $\mathbb{R}^n$. Такой подход позволяет (в пределах каждой карты) пользоваться методами математического анализа.

* * *

Математический анализ можно, таким образом, рассматривать как важную локальную часть теории гладких многообразий. Первая часть книги содержит важнейшие результаты классического математического анализа. Именно эти результаты являются основой теории многообразий и мы будем ссылаться на них на протяжении всей книги. Мы начинаем с теории вещественных функций одной переменной. Определяем и исследуем свойства непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости таких функций и аппроксимацию функций рядами Тейлора.

Далее мы переходим к изучению отображений между областями многомерных векторных пространств. Исследуем свойства непрерывных отображений, вводим очень важное для теории многообразий понятие дифференциала отображения, доказываем многомерную формулу Тейлора, доказываем важную для теории многообразий теорему о неявных отображениях и ряд других центральных результатов многомерного анализа (лемму Морса, множители Лагранжа и др.). Далее мы переходим к теории интегрирования функций многих переменных, доказываем теорему Фубини и критерий Лебега интегрируемости по Риману.

* * *

Вторая часть книги посвящена главным конструкциям теории гладких многообразий. Эти конструкции обсуждаются как на инвариантном языке, позволяющем понять их общематематический смысл, так и в координатной форме, позволяющей выполнять реальные вычисления.

Мы начинаем с определения гладкого многообразия и основных примеров. Мы показываем, что множества уровня гладких отображений дают важные примеры гладких многообразий. Далее мы доказываем в некотором смысле обратное утверждение (теорему Уитни) о том, что всякое m-мерное гладкое многообразие гладко вкладывается в пространство $\mathbb{R}^{2m+1}$. Для этого мы подробно обсуждаем свойства касательных пространств к точкам многообразий и критические значения отображений между многообразиями (теорема Сарда).

Далее мы переходим к обсуждению современных методов исследования многообразий. Они основаны на разработанной во второй половине XX века теории векторных расслоений. Расслоения позволяют определить и исследовать важный класс отображений (сечения расслоений), играющих для теории многообразий ту же роль, что и вектор-функции в классическом многомерном анализе. Мы исследуем общие свойства векторных расслоений и доказываем, что любое из них изоморфно обратному образу универсального расслоения при гладком отображении многообразия в многообразие Грассмана.

Специальную роль в теории гладких многообразий играют тензорные и внешние степени касательных и кокасательных расслоений. Их сечения (тензоры) несут важную информацию о свойствах многообразий. Мы подробно исследуем особенно важный класс тензоров, называемых дифференциальными формами. Для них удается определить операции дифференцирования и интегрирования, похожие на соответствующие операции классического анализа. Более того, между этими операциями существует взаимосвязь (общая формула Стокса), обобщающая классическую формулу Ньютона—

Лейбница. Следствием этой общей формулы являются классические формулы Грина, Гаусса—Остроградского и др.

Заключительный параграф второй части посвящен римановым многообразиям, т. е. многообразиям, на которых задана метрика, позволяющая измерять расстояние между точками. С помощью метрики можно также определить параллельный перенос касательных векторов, написать уравнение линии минимальной длины и построить тензор кривизны, измеряющий отличие метрики от евклидовой.

* * *

Третья часть книги посвящена методам исследования глобальных топологических свойств гладких многообразий. Оказывается, важную информацию о топологических свойствах многообразия можно получать, изучая алгебраические свойства групп сечений гладких расслоений и, в частности, тензорных полей на них. Необходимый для этого математический аппарат был создан в середине прошлого века. Он основан на *теории пучков*. Пучок — это структура, сопоставляющая каждому открытому подмножеству многообразия группу, похожую по свойствам на группу вектор-функций на пространстве $\mathbb{R}^n$. Далее мы сопоставляем каждому пучку группу когомологий с коэффициентами в пучке и исследуем свойства этого соответствия. Оказывается, что соответствие между многообразием с пучком и группой когомологий полностью определяется четырьмя простыми свойствами (аксиоматическая теория когомологий).

Кроме конструкции, с помощью которой мы определяем группы когомологий в этой книге, существует еще несколько разных и эффективных конструкций, приводящих к тем же группам когомологий. По традиции имена авторов этих конструкций переносятся на названия построенных когомологий. Мы подробно рассматриваем, в частности, когомологии Чеха. Эта конструкция подходит для любых пучков и активно используется при изучении взаимосвязи локальных и глобальных свойств многообразия. Мы приводим эффективный метод вычисления таких когомологий (теорема Лере).

Далее изучаются когомологии с коэффициентами в постоянном пучке, называемые когомологиями де Рама. Они хорошо описывают важнейшие глобальные топологические свойства гладкого многообразия. С помощью формулы Стокса мы доказываем, что эти когомологии двойственны гомологиям, имеющим чисто топологическое происхождение (теорема де Рама). Развита техника, позволяющая находить когомологии де Рама (теорема Майера—Вьеториса).

Изучаются соотношения между группами когомологий разных размерностей (теорема Пуанкаре).

Далее мы переносим элементы римановой геометрии на произвольные векторные расслоения. Определяем тензор кривизны комплексного расслоения и с его помощью класс Черна расслоения как специальный элемент группы когомологий де Рама многообразия.

В заключительном параграфе третьей части исследуются простейшие свойства пучков и расслоений на комплексных многообразиях. Мы определяем когомологии Дольбо, числа Ходжа и доказываем, что первый класс Черна голоморфного расслоения ранга 1 описывается оператором Бокштейна. Таким образом, он двойствен классу линейной эквивалентности дивизора мероморфного сечения расслоения.

* * *

Четвертая часть книги посвящена теории фробениусовых многообразий. Эта удивительная теория появилась в самом конце XX века. Она связывает между собой множество важных и, казалось бы, разных разделов математики и математической физики: дифференциальную геометрию, теорию особенностей, теорию интегрируемых систем, квантовые когомологии, теорию операд, пространства модулей алгебраических кривых и др.

Примеры фробениусовых многообразий делятся на два типа. Одни из них, так называемые *B*-модели, связаны с различными структурами на многообразиях (аналитическими, дифференциально-геометрическими и др.). Другой тип примеров, так называемые *A*-модели, связан с топологическими, комбинаторными и алгебраическими свойствами многообразий (инварианты Громова—Виттена, число специальных подмногообразий и др.). Между *A*- и *B*-моделями существуют глубокие, до конца не понятые связи, называемые зеркальной симметрией. В этой книге мы в основном обсуждаем дифференциально-геометрическую часть теории, созданную Б. А. Дубровиным [37] (см. также [39, 14, 11]). Последний параграф посвящен введению в алгебраические и топологические разделы теории. Он основан на работах М. Л. Концевича и Ю. И. Манина [41, 11].

Мы начинаем четвертую часть книги с обсуждения понятия полупростой фробениусовой пары. По определению это полупростая коммутативная ассоциативная алгебра с единицей вместе с симметричным невырожденным скалярным произведением. Согласно Дубровину, фробениусово многообразие — это гладкое многообразие, в каждой точке которого касательное пространство наделено структурой фробениусовой пары. Требуется, чтобы эти структуры порождали плоскую квазиоднородную метрику на всем многообразии. Кроме того, в окрестности каждой точки должна существовать *каноническая* система координат, порождающая канонический базис алгебры на касательном пространстве.

Изучение структур Дубровина мы начинаем с построения такой структуры на пространстве миниверсальных деформаций особенности A_n. Эта предложенная К. Саито [46] конструкция явилась одним из источников определения Дубровина. Далее мы показываем, что описание многообразия Дубровина—Фробениуса в канонических координатах эквивалентно уравнениям Дарбу—Егорова, описывающим ортогональные системы координат плоского многообразия. Эти же уравнения, как было выяснено сравнительно недавно, описывают взаимодействие нескольких волн [8].

Затем мы переходим к описанию структуры Дубровина в плоских координатах, в которых метрика, порожденная фробениусовыми парами, описывается постоянной матрицей. На этом пути мы доказываем теорему Дубровина о взаимно однозначном соответствии между его структурами и квазиоднородными решениями системы уравнений, названной Б. А. Дубровиным WDVV по именам физиков-теоретиков Э. Виттена и Р. Дейкграфа, Г. Верлинде, Э. Верлинде. Эта система независимо возникла в их работах по квантовой гравитации [47, 34].

В следующем параграфе показано, как многообразия Дубровина—Фробениуса появляются при решении других задач. Оказывается, в частности, что многообразия Дубровина—Фробениуса взаимно однозначно отвечают квазиоднородным плоским связкам кометрик. Плоские связки кометрик представляют собой семейства плоских кометрик, получающиеся линейной комбинацией двух из них. Они возникают, в частности, в теории дифференциальных уравнений гидродинамического типа. Связки кометрик используются далее для построения структуры Дубровина на пространствах орбит всех конечных групп Кокстера.

Теорема Дубровина сводит исследование важной дифференциально-геометрической структуры к исследованию решений системы WDVV. Этим решениям и некоторым их связям с другими разделами математики посвящен заключительный параграф четвертой части. Мы начинаем с принадлежащей Дубровину классификации решений в размерности 2 и 3. Далее, следуя Манину [11], описываем формальные решения WDVV в виде соотношений на коэффициенты их тейлоровских рядов. Эти соотношения представлены в виде системы корреляторов и операд специального вида.

Далее мы показываем, что такая система корреляторов естественно возникает в рамках когомологической теории поля Концевича—Манина. Важнейшим примером такой теории является теория инвариантов Громова—Виттена. В заключительном параграфе четвертой части объясняется, как инварианты Громова—Виттена позволяют решать классические проблемы алгебраической геометрии.

* * *

Книга основана на лекциях, которые автор на протяжении многих лет читал в Независимом московском университете и на факультете математики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики». Для освоения книги достаточно знать лишь основы линейной алгебры. Все, за небольшим исключением, утверждения книги снабжены полными доказательствами. Многочисленные упражнения и примеры являются важной частью книги.

Автор благодарит рецензента С. М. Гусейн-Заде и научного редактора С. Н. Малыгина за ценные советы и помощь в редактировании рукописи.

От редакции. К сожалению, автор этой книги Сергей Миронович Натанзон скончался 7 декабря 2020 года, во время работы над книгой, не дождавшись выхода книги в печать.