Введение

Методы анализа Фурье и теории всплесков применяются во многих теоретических и прикладных областях (математика, физика, астрономия, медицина, экономика, финансы, обработка сигналов и изображений, кодирование информации, компьютерная графика и др.). Основные сведения о рядах и преобразованиях Фурье содержатся во многих университетских учебниках (см., например, [3], [8], [11], [21]). Всплескам и их применениям посвящены десятки монографий, из переведенных на русский язык наиболее известными являются книги Добеши [5] и Малла [13] (см. также [2], [17] и [24]). В книгах Уэлстида [19] и Фрейзера [22] содержатся простейшие примеры применений дискретных преобразований Хаара и Добеши для сжатия изображений.

Многие российские математики изучали теорию всплесков по монографии И. Я. Новикова, В. Ю. Протасова и М. А. Скопиной [14]; из недавно изданных монографий отметим [30], [33] и [36]. Брошюра В. Ю. Протасова [15] доступна многим студентам первого и второго курсов и подготовленным старшеклассникам. В современных зарубежных учебниках по гармоническому анализу наряду с основами анализа Фурье излагаются элементы теории всплесков (см., например, [37], [38]). Книга Н. К. Смоленцева [19] является учебником по теории всплесков и их применениям в системе MATLAB для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям подготовки «Математика» и «Прикладная математика». Этот учебник может быть рекомендован также специалистам по компьютерным технологиям, применяющим современные математические методы для обработки сигналов и кодирования информации.

В отличие от преобразования Фурье всплесковые преобразования устойчивы к шумовым эффектам и применимы для обработки нестационарных сигналов. Непрерывное всплесковое преобразование иногда называют «математическим микроскопом», так как с его помощью удается проводить детальный анализ локальных свойств функций (см., например, [2], [12], [34], [35]). Ограничимся здесь одним примером.

В 1916 г. Харди доказал, что функция Римана

$$W(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi n^2 t)}{n^2}$$

не дифференцируема во всех иррациональных и некоторых рациональных точках. В 1970 г. Гервер доказал, что производная $W'(t)$ существует, только когда число t является рациональным числом с нечетным числителем и знаменателем. В 1990 г. Хольшнейдер и Чамичан с помощью непрерывного всплескового преобразования получили новое доказательство результатов Харди—Гервера и полностью охарактеризовали особенности функции $W(t)$ в рациональных точках, где она не дифференцируема (подробности см. в [34]).

Введение к книге Кристенсена [26] начинается так: «Фреймы меня очаровали с первого дня. Каждый студент-математик узнаёт о базисах в векторных пространствах, позволяющих представлять любой элемент в удобном и однозначном виде. Однажды в 1990 году Хенрик Стеткер, который был моим руководителем по магистерской диссертации, показал мне определение фрейма и сказал, что фрейм — это своего рода „сверхполный базис“: каждый элемент в векторном пространстве может быть представлен фреймом, но представление может быть не единственным. Я был очень удивлен: как получилось, что, например, в линейной алгебре вопрос всегда состоял в том, как извлечь базис из сверхполного множества, и никогда не возникала идея, что сверхполнота сама по себе может быть полезной?»

Теория фреймов развивалась параллельно теории всплесков, и многие конструкции фреймов в гильбертовых пространствах используют всплески. Благодаря полноте, устойчивости и избыточности дискретных представлений сигналов фреймы существенно дополняют ортогональные базисы всплесков в таких областях, как обработка сигналов, квантовая теория информации, многомерные ортогональные полиномы и сплайны, а также в теории сжатых измерений (compressed sensing). Книга [26] содержит обширную библиографию о фреймах, включая ссылки исторического характера.

Основная цель настоящей брошюры — подготовить читателя к изучению современной литературы о всплесках и фреймах. Брошюра состоит из двух частей. Первая часть содержит сведения о рядах Фурье в гильбертовых пространствах, широко используемые в теории всплесков и необходимые для понимания второй части. В качестве примеров рассмотрены тригонометрические ряды Фурье и ряды по многочленам Лежандра. Сформулированы определения безусловного базиса, фрейма, системы Бесселя и системы Рисса. Доказательства приведенных в части 1 утверждений о фреймах в гильбертовых пространствах можно прочитать в [2], [5], [13], [26] и [33]. До разбора этих доказательств полезно ознакомиться с элементами теории фреймов в конечномерных пространствах. Книга [32], изданная Американским математическим обществом в 2008 г., остается хорошим введением в теорию конечных фреймов для студентов, магистрантов и аспирантов, в программы обучения которых входят элементы матричного анализа и линейной алгебры. Изданная в 2018 г. книга [40] является наиболее полным изложением конечномерных фреймовых конструкций и может быть полезна при разработке учебных курсов по линейной алгебре, теории графов, теории характеров, теории представлений и теории Галуа. В статье [20] отмечаются взаимосвязи конечномерных фреймовых конструкций с несколькими известными задачами и результатами, в том числе с задачей Томсона о минимизации энергии расположенных на сфере электрических зарядов, с конечномерным вариантом теоремы Наймарка о представлении жёстких фреймов как ортогональных проекций ортонормированных базисов, с задачей о существовании матриц Адамара, с задачей о существовании систем Штейнера и с задачей о вычислении максимального числа равноугольных прямых. Во второй части брошюры дан обзор исходных понятий и теорем о всплесках, включая условия обратимости непрерывного всплескового преобразования, понятие кратномасштабного анализа и свойства классических всплесков. Общая схема построения фреймов Парсеваля на прямой проиллюстрирована на примере B-сплайновых фреймов, имеющих различные многомерные обобщения.

Текст брошюры подготовлен по материалам спецкурсов о всплесках и фреймах для студентов МГРИ–РГГРУ и РУДН, обучавшихся по специальности «Прикладная математика», и по материалам мини-курса о всплесках, прочитанного автором по приглашению С. В. Асташкина и С. Я. Новикова на механико-математическом факультете Самарского государственного университета в апреле 2023 года.