

## Предисловие

Казалось бы, странно видеть в серии, посвящённой математическим кружкам, книжку с сугубо школьным названием. Но на это есть причины. Во-первых, не все тождества сокращённого умножения включены в общеобразовательную программу школьного курса алгебры. Во-вторых, задания на эту тему в школьных учебниках и задачниках, как правило, являются стандартными однотипными упражнениями, а многие задачи, вошедшие в книжку, взяты из олимпиад и турниров различного уровня (это подтверждает как список использованной литературы, так и список авторов задач). И наконец, по опыту автора и некоторых его коллег, многим школьникам, посещающим математические кружки, не хватает именно алгебраической техники, а разнообразная работа с задачами, включёнными в эту книжку, может помочь ликвидировать этот пробел. Сказанное не исключает использование предлагаемого материала и на школьных уроках.

За рамками этой книжки осталось применение формул сокращённого умножения для доказательства и решения неравенств (неравенствам планируется посвятить отдельную книжку), а также использование этих формул в тригонометрии, показательных и логарифмических уравнениях. Это связано с тем, что при решении таких уравнений свойства соответствующих функций уже заслоняют применение указанных тождеств.

Книжка «Тождества сокращённого умножения» содержит 13 занятий. В материалы каждого занятия входят: краткий поясняющий текст для учителя; несколько подробно разобранных типовых задач; задачи, которые могут быть предложены учащимся для самостоятельного решения (как на занятии, так и дома); подробные решения этих задач

(в ряде случаев — несколькими способами); методические комментарии для учителя, часто включающие в себя *путь к решению* (текст, объясняющий, как можно прийти к этому решению).

Отдельным списком представлены дополнительные задачи различного уровня трудности, часть из которых может служить подготовительными упражнениями или в какой-то степени дублировать задачи, предложенные для занятий, а часть дополняет их новыми идеями (наиболее сложные задачи отмечены знаком \*). Эти задачи можно использовать на усмотрение преподавателя (или обучающегося). Для них также, как правило, приведены подробные решения (в отдельных случаях — ответы и указания).

Материалы этой книжки могут использоваться как для проведения занятий кружка, так и для уроков математики в 7—9 классах (кроме занятия 13), но могут оказаться полезными и для работы с более старшими учащимися. Занятия упорядочены не по сложности, а в соответствии с прохождением школьной программы. Задачи в них, как правило, сгруппированы по областям применения тождеств.

**Занятие 1. Формулы разности квадратов, квадрата двучлена, суммы и разности кубов.** Занятие ориентировано на школьников 7 класса. Повторяются формулы сокращённого умножения, которые выделены в любом учебнике алгебры 7 класса. Решение задач этого занятия сводится к раскрытию скобок, заключению в скобки и/или разложению на множители.

**Занятие 2. Формулы квадрата трёхчлена и куба двучлена.** Занятие адресовано школьникам 7 класса. Основное содержание: повторение и применение этих тождеств для решения задач. В отличие от занятия 1, в условиях некоторых задач могут содержаться многочлены с тремя и даже четырьмя переменными.

**Занятие 3. Вычисление значений числовых выражений.** Занятие для учащихся 7 или 8 классов посвящено вычис-

лительным задачам, т. е. поиску значений числовых выражений. При решении некоторых задач используются те же приёмы, что и в двух предыдущих занятиях, но появляются и новые методы, в частности, широко используется введение переменных для удобства преобразований.

**Занятие 4. Квадраты и кубы натуральных чисел.** Занятие для школьников 7—8 классов. В нём собраны задачи на представление чисел или (числовых) выражений в виде квадратов или кубов натуральных чисел. Активно используется приём замены числа переменной, который уже отработывался в занятии 3. Ряд задач формулируется в виде «Существует ли ...?» либо «Можно ли ...?», что, как правило, подразумевает поиск соответствующих примеров.

**Занятие 5. Разные задачи.** Занятие адресовано учащимся 8 классов. На этом занятии, как и на первых двух, рассматриваются задачи, в условиях которых содержатся выражения с переменными. Применение тождеств сокращённого умножения соседствует с использованием других идей (например, с применением теоремы Виета для квадратного уравнения или сложением нескольких верных равенств). Ряд задач сложнее технически за счёт увеличения количества переменных или наличия больших показателей степеней.

**Занятие 6. Простые и составные числа.** Занятие для учащихся 8 класса. На нём рассматриваются задачи, связанные с простыми и составными числами. Для решения некоторых задач, помимо применения тождеств, потребуются простейшие соображения, связанные с делимостью целых чисел, поэтому желательно предварительное знакомство школьников с этими сведениями.

**Занятие 7. Делимость. Уравнения в целых числах.** Занятие для школьников 8 класса включает задачи, в решениях которых используются также свойства делимости целых чисел. Подобные идеи уже встречались в ряде задач заня-

тия 5, но там упор был сделан на простые и составные числа. Задания похожи на задачи занятия 4, но идеи их решения отличаются. Во многих задачах потребуется разложить число на простые множители либо использовать признаки делимости на конкретные числа. И здесь имеет смысл заранее познакомить школьников с основами теории делимости.

**Занятие 8. Формулы для  $x^n - 1$  и  $x^{2k+1} + 1$  и их обобщение.** Это занятие адресовано школьникам 8—9 классов. В его рамках выводятся четыре новых тождества, которые являются обобщениями формул разности квадратов, суммы и разности кубов. Рассматриваются задачи на применение этих тождеств, большая часть которых связана с делимостью целых чисел. Кроме того, есть задачи, связанные с делимостью многочленов нацело. Тем самым продолжается линия, намеченная в занятиях 6 и 7.

**Занятие 9. Тождества трёх кубов и куба трёхчлена.** Занятие для учащихся 8—9 классов посвящено доказательству двух новых тождеств, которые удобно использовать при решении некоторых задач. Ряд задач, предлагаемых для самостоятельного решения, иллюстрирует эффективность их использования. Отдельное внимание уделяется теореме Виета для корней кубического многочлена.

**Занятие 10. Рациональные уравнения.** Это занятие ориентировано на школьников 9 класса. На нём рассматриваются рациональные уравнения и различные приемы их решения, в том числе стандартные методы (сведение к квадратным уравнениям, разложение на множители, замена переменной, использование симметрии уравнения и пр.).

**Занятие 11. Системы рациональных уравнений.** Занятие адресовано учащимся 9—10 классов. Его содержанием являются системы рациональных уравнений. Такие системы уравнений, как правило, являются симметрическими или циклическими. Изучаются разные методы решения, включая стандартные (подстановка, алгебраическое сложение

ние уравнений, замена переменных, использование симметрии уравнений и пр.).

**Занятие 12. Преобразование выражений, содержащих корни.** Это занятие также ориентировано на школьников 9—10 классов. Оно посвящено задачам, при решении которых требуется преобразовать выражения, содержащие корни (по большей части квадратные или кубические), либо найти значения этих выражений. В каком-то смысле это занятие продолжает линию, намеченную в занятии 3, но на другом уровне знакомства с программой школьного курса алгебры. Несколько задач являются подготовительными к решению некоторых видов иррациональных уравнений, которые будут рассмотрены в следующем занятии.

**Занятие 13. Иррациональные уравнения.** Это занятие тоже имеет смысл проводить со школьниками 9 или 10 классов. На нём рассматриваются иррациональные уравнения, при решении которых существенную роль играют различные тождества сокращённого умножения. При этом за его рамками остаются уравнения, решение которых сводится к однократному или двукратному возведению обеих частей в квадрат, после чего сразу получается линейное или квадратное уравнение. Таких уравнений много как в школьных учебниках и задачниках, так и в различных пособиях для поступающих в вузы. В занятие включены уравнения, требующие менее стандартного подхода, хотя многие использованные приёмы тоже можно считать типовыми.

Для удобства использования все тождества сокращённого умножения собраны на отдельной странице в качестве приложения. Кроме того, по традиции в конце книжки все занятия представлены в виде дидактических материалов. Понятно, что преподаватель математического кружка (или учитель на уроках или факультативных занятиях) может по своему усмотрению использовать только часть предложенных занятий, поменять порядок их изучения и т. д.

Выражаю благодарность всем авторам книг и статей, указанных в списке литературы, а также авторам всех ис-

пользованных задач (многих из авторов установить, к сожалению, не удалось). Существенную роль в улучшении текста сыграли замечания главного редактора серии А. В. Шاپовалова, которому я выражаю отдельную благодарность.