

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Формальная красота математики определяется так («Колмогоров». Книга 3. М.: Физматлит, 2003. С. 122):

«1. Нравятся сложные формы, удивляющие, несмотря на свою сложность, доступностью для наглядного понимания (циклоида и тому подобные кривые).

2. Нравится соединение без противоречия различных, казалось бы, не связанных закономерностей».

Предлагаемая книга о теории особенностей удовлетворяет именно этим двум условиям: она доставляет наглядное понимание сложнейших явлений физики, вроде каустик и волновых фронтов, включая детальный анализ циклоид и их обобщений — с одной стороны, а с другой — связывает воедино большинство областей прикладной и чистой математики, от вариационного исчисления до дифференциальной геометрии, от теории простых алгебр Ли до топологической теории узлов и кос, от многогранников Ньютона асимптотических разложений до алгебраической геометрии теории ветвления интегралов, от геометрической оптики и теории радуги до квантовой механики и теории адиабатических инвариантов, от теории чисел до диофантовой геометрии подмногообразий проективного пространства, от осциллирующих интегралов до многомерного метода перевала, от характеристических классов и кобордизмов до преобразований Лежандра и симплектической топологии лагранжевых многообразий и до дифференциальных уравнений Гамильтона классической и квантовой механики.

При этом неочевидные, но глубокие связи между всеми этими предметами становятся не только ясными проявлениями единства всего математического естествознания, но и применяются для облегчения исследований в каждой из указанных дисциплин при помощи методов других: сложное поведение управляемых динамических систем или систем лучей в оптически неоднородных средах оказывается объясненным симметриями правильных многогранников, вроде икосаэдра или пяти кубов Кеплера, вписанных им в додекаэдр, который Колмогоров сопроводил в своем дневнике («Колмогоров», с. 140) словами Гёте:

Jeder Weg zum rechten Zwecke
Ist auch recht in jeder Strecke.

Продолжая свое описание природы математики, Колмогоров писал в цитированном выше дневнике 1943 года («Колмогоров», с. 52): «В каждый данный момент существует лишь тонкий слой между тривиальным и недоступным. В этом слое и делаются математические открытия.»

Читатель настоящей книги вводится ею как раз в тот тонкий слой, где становится легко сделать шаг к недоступному. Книга рассчитана именно на желающего сделать этот шаг читателя.

Описывая мистические порой результаты теории особенностей, авторы старались избежать упрека, сделанного Колмогоровым Г. Вейлю («Колмогоров», с. 136): «нет уверенности, что он стремится всегда к простоте, а не к мистификации».

Именно простота излагаемых фундаментальных теорий, а не их непонятность, была основным принципом отбора материала для настоящей книги, значительную часть которой составляет теория простых особенностей и ее связи с теорией простых групп Ли и порожденных отражениями групп Кокстера (вроде группы симметрий додекаэдра).

Приложения этих теорий часто появляются под именами «Теории катастроф», «Квантовой теории катастроф». Мы оставляем читателю возможность самостоятельно оценить достигаемые этими терминологическими нововведениями более поздние варианты тех использованных теорией катастроф фундаментальных исходных фактов теории особенностей, которые мы излагаем ниже. Читатель получил бы больше, чем новая терминология, от решения той сотни задач, которой заканчивается третье издание книги В. И. Арнольда «Теория катастроф» (М.: Наука, 1990).

Со времени предыдущего издания настоящего сочинения вышло несколько новых книг на близкую тему; читателю можно порекомендовать «Особенности каустик и волновых фронтов» и «Волновые фронты и топология кривых» (М.: Фазис, 1996; М.: Фазис, 2002) и указанную там литературу.

В. И. Арнольд

...нет ничего увлекательнее и грандиознее, ничто так не ошеломляет и не захватывает человеческого духа, как начало какой-нибудь науки. С первых же пяти-шести лекций вас уже окрыляют самые яркие надежды, вы уже кажетесь себе хозяином истины. И я отдался наукам беззаветно, страстно, как любимой женщине. Я был их рабом и, кроме них, не хотел знать никакого другого солнца. День и ночь, не разгибая спины, я зубрил, разорялся на книги, плакал, когда на моих глазах люди эксплуатировали науку ради личных целей. Но я недолго увлекался. Штука в том, что у каждой науки есть начало, но вовсе нет конца, все равно, как у периодической дроби. Зоология открыла тридцать пять тысяч видов...

А. П. Чехов. На пути

В этой книге изложены начала «зоологии» особенностей дифференцируемых отображений. Эта теория — молодая отрасль анализа, занимающая в современной математике центральное положение: здесь пересекаются пути, ведущие от самых абстрактных отделов математики (алгебраическая и дифференциальная геометрия и топология, группы и алгебры Ли, комплексные многообразия, коммутативная алгебра и т. п.) к наиболее прикладным областям (дифференциальные уравнения и динамические системы, оптимальное управление, теория бифуркаций и катастроф, коротковолновые и перевальные асимптотики, геометрическая и волновая оптика).

Основные приложения теории особенностей заключаются в выделении и детальном исследовании в каждой ситуации небольшого набора наиболее часто встречающихся стандартных особенностей, которые только и могут быть у объектов общего положения: все более сложные особенности распадаются на простейшие при малом шевелении объекта. Мы приводим довольно полные списки, рисунки и определители таких простейших особенностей для целого ряда объектов (функций, отображений, многообразий, бифуркаций, каустик, волновых фронтов и т. д.), стараясь по возможности сократить читателю путь от исходных начал к приложениям. В соответствии с этим мы стремились изложить основные идеи, методы и результаты теории особенностей таким образом, чтобы читатель мог, не задерживаясь на обосновательной, теологической части теории, как можно быстрее научиться применять ее методы и результаты.

Особые усилия были приложены к тому, чтобы изложение основных идей и методов не заслонялось техническими деталями. С наибольшей подробностью рассматриваются наиболее фундаментальные и простые вопросы, в то время как изложение более специальных и трудных частей теории носит характер обзора.

У читателя настоящей книги предполагаются лишь очень небольшие математические познания (умение дифференцировать и немного линейной алгебры и геометрии) *). Авторы старались строить изложение так, чтобы читатель мог пропускать места, оказавшиеся для него трудными, без большого ущерба для понимания дальнейшего.

В настоящее время теория особенностей бурно развивается (ср., например, списки нерешенных задач в [18] и [251]), и мы не пытались охватить все многочисленные направления современных исследований по теории особенностей и ее приложениям (неполная библиография из примерно 500 работ имеется у Постона и Стюарта [428] и у Брискорна [274]).

Основу этой книги составил ряд спецкурсов, читавшихся на механико-математическом факультете МГУ в 1966—1978 гг. При подготовке книги были использованы записки лекций, составленные В. А. Васильевым, Е. Е. Ландис, А. Г. Хованским; А. Г. Хованским написан § 5. Авторы благодарны перечисленным лицам, а также участникам семинара по теории особенностей, помощью которых они широко пользовались, в особенности А. Г. Кушниренко, Е. И. Коркиной и В. И. Матову.

Комплексно-аналитические и алгебро-геометрические аспекты теории особенностей (монодромия, пересечения, асимптотики интегралов и смешанные структуры Ходжа) войдут в готовящуюся к изданию книгу «Особенности дифференцируемых отображений. Алгебро-топологические аспекты» **).

Ясенево, март 1979 г.

*) Читателя-нематематика полезно предупредить о терминологии:

1) многообразия — это многомерные обобщения кривых и поверхностей, а отображения — функций; диффеоморфизмы — это взаимно однозначные отображения, дифференцируемые вместе с обратными им;

2) преобразования множества — это взаимно однозначные отображения множества на себя; группа преобразований множества — это набор преобразований, содержащий наряду с каждым преобразованием обратное и наряду с каждым двумя преобразованиями их произведение; группа — продукт аксиоматизации свойств групп преобразований;

3) алгебра есть продукт аксиоматизации свойств множества всех функций на многообразии (элементы алгебры, подобно функциям, можно складывать и умножать друг на друга и на числа, причем выполняются обычные правила ассоциативности, дистрибутивности и коммутативности; в алгебре отмечен элемент 1 со свойством $1f \equiv f$);

4) модуль над алгеброй есть продукт аксиоматизации свойств множества всех векторных полей на многообразии (элементы модуля можно складывать между собой и умножать на элементы алгебры);

5) идеал в алгебре — это ее подмодуль над самой собой. Пример: в алгебре всех функций на многообразии функции, обращающиеся в нуль на данном подмногообразии, образуют идеал.

**) Арнольд В. И., Варченко А. М., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. Монодромия и асимптотики интегралов. М.: Наука, 1984. В настоящем издании это главы IV—VI. — *Прим. ред.*

Настоящая книга *) является продолжением книги Арнольд В. И., Варченко А. И., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов. — М.: Наука, 1982 г.

Если предыдущая книга содержала начала зоологии особенностей дифференцируемых отображений, т. е. была посвящена описанию того, где и какие особенности могут встречаться, то эта книга содержит элементы анатомии и физиологии особенностей дифференцируемых функций. Это означает, что в ней рассматриваются вопросы строения особенностей и их функционирования.

Другой отличительной чертой настоящей книги является упор на вопросы, для которых важен выход в комплексную область, в то время как первая часть посвящена темам, для большинства из которых несущественно, над каким полем (вещественным или комплексным) они рассматриваются. Такие вопросы, как, например, распадение особенностей, связь особенностей с алгебрами Ли, асимптотики различных интегралов, зависящих от параметров, становятся яснее в комплексной области.

Книга состоит из трех глав **). В первой главе рассматривается топологическое строение изолированных критических точек голоморфных функций. Описываются основные топологические характеристики таких критических точек: исчезающие циклы, отмеченные базисы, матрицы пересечений, группы монодромии, оператор вариации — их взаимоотношения и методы вычислений.

Вторая глава посвящена исследованию асимптотик интегралов метода стационарной фазы, широко встречающихся в приложениях. Излагаются методы вычисления асимптотик, обсуждаются связи асимптотик с различными характеристиками критических точек фаз интегралов (разрешением особенностей, многогранниками Ньютона), приведены таблицы порядков асимптотик для критических точек фаз, которые расклассифицированы в предыдущей книге (в частности, для простых, унимодальных и бимодальных).

*) Первое издание книги вышло в двух томах, соответствующих частям I и II настоящего издания. — *Прим. ред.*

**) В настоящем издании это главы IV—VI. — *Прим. ред.*

Третья глава посвящена интегральному исчислению на многообразиях уровня критической точки голоморфной функции. В ней рассматриваются интегралы голоморфных форм, заданных в окрестности критической точки, по циклам, лежащим на гиперповерхностях уровня функции. Интеграл голоморфной формы по циклу голоморфно изменяется при непрерывной деформации цикла из одной гиперповерхности уровня в другую. Таким образом возникают многозначные голоморфные функции, заданные на комплексной прямой в окрестности критического значения функции. Оказывается, что асимптотики этих функций (т. е. асимптотики интегралов) при стремлении уровня к критическому связаны с разнообразными характеристиками исходной критической точки голоморфной функции.

Теория особенностей является обширной и быстро развивающейся областью математики, и мы не стремились затронуть все ее направления.

Список литературы содержит работы, непосредственно связанные с текстом (хотя иногда и не цитируемые в нем), а также работы, связанные с предыдущей книгой, по тем или иным причинам не вошедшие в ее библиографию.

Авторы благодарны участникам семинара по теории особенностей МГУ, в особенности — А. М. Габриэлову, А. Б. Гивенталю, А. Г. Кушниренко, Д. Б. Фуксу, А. Г. Хованскому. Авторы благодарны также В. С. Варченко и Т. В. Огородниковой, оказавшим большую помощь при подготовке рукописи к печати.

Авторы