

Оглавление

Глава 1. Множества и отображения	11
§ 1.1. Множества	11
§ 1.2. Отображения	12
§ 1.3. Слои отображений	14
§ 1.4. Классы эквивалентности	17
1.4.1. Неявное задание эквивалентности	19
§ 1.5. Композиции отображений	20
1.5.1. Правое обратное отображение и аксиома выбора	22
1.5.2. Обратимые отображения	22
§ 1.6. Группы преобразований	23
§ 1.7. Частично упорядоченные множества	24
§ 1.8. Вполне упорядоченные множества	26
§ 1.9. Лемма Цорна	27
<i>Задачи для самостоятельного решения к главе 1</i>	28
Глава 2. Поля, коммутативные кольца и абелевы группы	31
§ 2.1. Определения и примеры	31
2.1.1. Коммутативные кольца	33
2.1.2. Абелевы группы	33
2.1.3. Вычитание и деление	34
§ 2.2. Делимость в кольце целых чисел	35
2.2.1. Уравнение $ax + by = k$, НОД и НОК	35
2.2.2. Алгоритм Евклида — Гаусса	36
§ 2.3. Взаимная простота	38
§ 2.4. Кольцо вычетов $\mathbb{Z}/(n)$	39
2.4.1. Делители нуля и нильпотенты	39
2.4.2. Обратимые элементы кольца вычетов	40
2.4.3. Поля вычетов $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p)$	41
§ 2.5. Гомоморфизмы	42
2.5.1. Ядро	42
2.5.2. Группа гомоморфизмов	43
2.5.3. Гомоморфизмы колец	43
2.5.4. Гомоморфизмы полей	44

2.5.5. Характеристика	44
2.5.6. Простое подполе	45
§ 2.6. Прямые произведения	46
§ 2.7. Китайская теорема об остатках	47
<i>Задачи для самостоятельного решения к главе 2</i>	48
Глава 3. Многочлены и расширения полей	53
§ 3.1. Ряды и многочлены	53
3.1.1. Алгебраические операции над рядами	54
3.1.2. Многочлены	55
3.1.3. Дифференциальное исчисление	55
§ 3.2. Делимость в кольце многочленов	57
3.2.1. Взаимная простота	59
3.2.2. Алгоритм Евклида — Гаусса	59
§ 3.3. Корни многочленов	61
3.3.1. Присоединение корней	62
3.3.2. Общие корни	64
3.3.3. Кратные корни	64
3.3.4. Сепарабельность	65
§ 3.4. Поле комплексных чисел	65
3.4.1. Комплексное сопряжение	68
3.4.2. Тригонометрия	68
3.4.3. Корни из единицы и круговые многочлены	69
§ 3.5. Конечные поля	70
3.5.1. Циклические группы и порядки элементов	71
<i>Задачи для самостоятельного решения к главе 3</i>	73
Глава 4. Дроби и ряды	79
§ 4.1. Кольца частных	79
§ 4.2. Рациональные функции	82
4.2.1. Разложение на простейшие дроби	83
4.2.2. Разложение рациональной функции в степенной ряд	84
4.2.3. Решение линейных рекуррентных уравнений	85
§ 4.3. Логарифм и экспонента	86
4.3.1. Логарифмирование и экспоненцирование	87
4.3.2. Степенная функция и бином	88
§ 4.4. Действие $\mathbb{Q}[[d/dt]]$ на $\mathbb{Q}[t]$	90
§ 4.5. Ряды Пуизо	94
4.5.1. Окончание доказательства теоремы 4.3	97
4.5.2. Контрпример к теореме 4.3 в положительной характеристике	97
4.5.3. Метод Ньютона	97
<i>Задачи для самостоятельного решения к главе 4</i>	102

Глава 5. Идеалы, факторкольца и разложение на множители . . .	107
§ 5.1. Идеалы	107
5.1.1. Нётеровость	108
5.1.2. Примеры ненётеровых колец	109
§ 5.2. Факторкольца	110
§ 5.3. Кольца главных идеалов	113
5.3.1. Евклидовы кольца	113
5.3.2. НОД и взаимная простота	114
§ 5.4. Факториальность	115
5.4.1. Неприводимые элементы	115
5.4.2. Простые элементы	116
5.4.3. НОД в факториальном кольце	118
§ 5.5. Многочлены над факториальным кольцом	119
§ 5.6. Разложение многочленов с целыми коэффициентами	121
5.6.1. Редукция коэффициентов	121
5.6.2. Алгоритм Кронекера	122
<i>Задачи для самостоятельного решения к главе 5</i>	<i>123</i>
Глава 6. Модули над коммутативными кольцами	127
§ 6.1. Определения и примеры	127
§ 6.2. Линейные отображения	129
6.2.1. Модуль гомоморфизмов	130
§ 6.3. Прямые произведения и прямые суммы	131
§ 6.4. Пересечения и суммы подмодулей	132
§ 6.5. Фактормодули	134
6.5.1. Строение гомоморфизма	134
6.5.2. Фактор модуля по идеалу кольца	135
§ 6.6. Дополнительные подмодули и разложимость	135
§ 6.7. Образующие и соотношения	136
6.7.1. Свободные модули	137
6.7.2. Задание модуля образующими и соотношениями	138
6.7.3. Соотношения и гомоморфизмы	139
<i>Задачи для самостоятельного решения к главе 6</i>	<i>140</i>
Глава 7. Векторные пространства	143
§ 7.1. Базисы и размерность	143
§ 7.2. Размерности подпространств и факторпространств	147
§ 7.3. Бесконечномерные векторные пространства	149
§ 7.4. Двойственность	151
7.4.1. Двойственные базисы	152
7.4.2. Свёртки	153
7.4.3. Двойственность между подпространствами	156

7.4.4. Двойственные линейные отображения	158
<i>Задачи для самостоятельного решения к главе 7</i>	159
Глава 8. Матрицы	165
§ 8.1. Алгебры над коммутативными кольцами	165
8.1.1. Алгебра квадратных матриц $\text{Mat}_n(K)$	166
8.1.2. Алгебраические и трансцендентные элементы	168
8.1.3. Обратимые элементы	169
8.1.4. Отступление о группах	171
§ 8.2. Умножение матриц	172
§ 8.3. Матрицы перехода	174
§ 8.4. Матрицы линейных отображений	178
8.4.1. Матрицы гомоморфизмов свободных модулей	180
§ 8.5. Матрицы систем линейных уравнений	180
8.5.1. Системы линейных уравнений над полем	181
<i>Задачи для самостоятельного решения к главе 8</i>	182
Глава 9. Метод Гаусса	187
§ 9.1. Метод Гаусса над областью главных идеалов	187
9.1.1. Инвариантные множители и нормальная форма Смита	189
9.1.2. Отыскание обратной матрицы	192
9.1.3. Решение систем линейных уравнений	194
§ 9.2. Метод Гаусса над полем	197
9.2.1. Построение базиса в подпространстве	198
9.2.2. Решение систем линейных уравнений	199
9.2.3. Отыскание базиса в ядре и образе линейного отображения	202
9.2.4. Построение базиса в факторпространстве	203
§ 9.3. Расположение подпространства относительно базиса	204
9.3.1. Комбинаторный тип подпространства	206
<i>Задачи для самостоятельного решения к главе 9</i>	208
Глава 10. Конечно порождённые модули над областью главных идеалов	213
§ 10.1. Взаимные базисы и инвариантные множители	213
§ 10.2. Теорема об элементарных делителях	216
10.2.1. Отщепление кручения	218
10.2.2. Отщепление p -кручения	219
10.2.3. Инвариантность показателей p -кручения	220
10.2.4. Единственность инвариантных множителей	221
§ 10.3. Конечно порождённые абелевы группы	222
10.3.1. Канонические и не канонические слагаемые	224

10.3.2. Циклические группы и минимальные наборы образующих	224
10.3.3. Неразложимые группы	225
10.3.4. Простые и полупростые группы	225
10.3.5. Группы, заданные образующими и соотношениями	226
10.3.6. Подрешётки в \mathbb{Z}^m	228
<i>Задачи для самостоятельного решения к главе 10</i>	229
Глава 11. Грассмановы многочлены и определители	235
§ 11.1. Длина, знак и чётность перестановки	235
§ 11.2. Определитель	237
§ 11.3. Грассмановы многочлены	239
11.3.1. Грассманова алгебра свободного модуля	241
11.3.2. Линейные замены переменных и миноры	241
11.3.3. Соотношения Лапласа	243
§ 11.4. Присоединённая матрица	246
11.4.1. Разложение определителя по строке или столбцу	246
11.4.2. Формула для обратной матрицы	247
11.4.3. Тождество Гамильтона — Кэли	249
<i>Задачи для самостоятельного решения к главе 11</i>	250
Глава 12. Пространства с оператором	255
§ 12.1. Классификация пространств с оператором	255
12.1.1. Пространство с оператором как $\mathbb{k}[t]$ -модуль	256
12.1.2. Отыскание элементарных делителей	257
12.1.3. Характеристический многочлен	259
12.1.4. Минимальный многочлен	260
12.1.5. Линейные операторы над алгебраически замкнутым полем	262
12.1.6. Нормальные формы матриц над незамкнутыми полями	263
§ 12.2. Специальные классы операторов	266
12.2.1. Нильпотентные операторы	266
12.2.2. Полупростые операторы	267
12.2.3. Циклические векторы	268
12.2.4. Собственные подпространства и собственные числа	269
12.2.5. Спектр	269
12.2.6. Диагонализуемые операторы	270
12.2.7. Перестановочные операторы	271
12.2.8. Аннулирующие многочлены	272
§ 12.3. Корневое разложение и функции от операторов	273
12.3.1. Функции от операторов	274
12.3.2. Интерполяционный многочлен	277

§ 12.4. Разложение Жордана	280
<i>Задачи для самостоятельного решения к главе 12</i>	281
Глава 13. Аффинные и проективные пространства	287
§ 13.1. Аффинные пространства	287
13.1.1. Аффинные подпространства	289
13.1.2. Аффинные координаты	290
§ 13.2. Аффинные отображения	291
§ 13.3. Полуаффинные преобразования	292
§ 13.4. Проективные пространства	295
13.4.1. Глобальные однородные координаты	296
13.4.2. Локальные аффинные координаты	296
13.4.3. Касательное пространство в точке	297
13.4.4. Проективные подпространства	298
13.4.5. Дополнительные подпространства и проекции	298
13.4.6. Проективная двойственность	299
§ 13.5. Проективные преобразования	300
13.5.1. Проективные автоморфизмы прямой	301
§ 13.6. Алгебраические многообразия	303
13.6.1. Аффинные алгебраические многообразия	304
13.6.2. Проективные алгебраические многообразия	304
13.6.3. Проективное замыкание аффинной гиперповерхности	305
<i>Задачи для самостоятельного решения к главе 13</i>	306
Глава 14. Евклидовы пространства	313
§ 14.1. Скалярное произведение	313
14.1.1. Ортонормальные базисы	314
14.1.2. Матрицы Грама	315
§ 14.2. Объём	316
14.2.1. Евклидов объём	318
§ 14.3. Евклидова двойственность	320
14.3.1. Двойственные базисы	320
14.3.2. Ортогоналы	321
§ 14.4. Евклидово расстояние	322
§ 14.5. Евклидов угол	322
§ 14.6. Ортогональные проекции	324
14.6.1. Расстояние до подпространства	325
14.6.2. Угол между вектором и подпространством	327
§ 14.7. Векторные произведения	328
<i>Задачи для самостоятельного решения к главе 14</i>	330

Глава 15. Пространства с билинейной формой	335
§ 15.1. Билинейные формы	335
15.1.1. Корреляции	336
15.1.2. Ядра, ранг и коранг	337
15.1.3. Изометрии	337
§ 15.2. Невырожденность	338
15.2.1. Левый и правый двойственный базис	340
15.2.2. Изотропные подпространства	340
15.2.3. Группа изометрий	341
§ 15.3. Ортогональные разложения	342
§ 15.4. Соответствия между формами и операторами	343
15.4.1. Канонический оператор	343
15.4.2. Сопряжение операторов	346
15.4.3. Рефлексивные операторы	347
§ 15.5. Неразложимые невырожденные формы	348
<i>Задачи для самостоятельного решения к главе 15</i>	353
Глава 16. Симметричные и кососимметричные формы	359
§ 16.1. Симметричность и кососимметричность	359
16.1.1. Ядро	360
16.1.2. Ортогоналы и проекции	360
§ 16.2. Сопряжение операторов	362
§ 16.3. (Анти)самосопряжённые операторы над замкнутым полем	364
§ 16.4. Симплектические и гиперболические пространства	368
§ 16.5. Симплектическая группа	371
§ 16.6. Грассмановы квадратичные формы и пфаффиан	372
16.6.1. Поляризация грассмановой квадратичной формы	373
16.6.2. Пфаффиан	374
<i>Задачи для самостоятельного решения к главе 16</i>	377
Глава 17. Квадратичные формы	381
§ 17.1. Пространства с симметричным скалярным произведением	381
17.1.1. Изотропные и анизотропные подпространства	381
17.1.2. Изометрии и отражения	382
§ 17.2. Квадратичные формы	386
§ 17.3. Квадратичные формы над конечными полями	389
§ 17.4. Вещественные квадратичные формы	390
17.4.1. Квадратичные формы на евклидовом пространстве	391
17.4.2. Вычисление сигнатуры	392
§ 17.5. Проективные квадрики	395
17.5.1. Квадрики на \mathbb{P}_1	396
17.5.2. Касательные прямые и касательное пространство	396

17.5.3. Планарность гладкой квадрики	398
<i>Задачи для самостоятельного решения к главе 17</i>	400
Глава 18. Примеры групп	405
§ 18.1. Группы	405
18.1.1. Симметрическая группа S_n	407
18.1.2. Группы фигур	409
§ 18.2. Гомоморфизмы групп	413
§ 18.3. Действие группы на множестве	418
18.3.1. Орбиты	420
18.3.2. Перечисление орбит	422
<i>Задачи для самостоятельного решения к главе 18</i>	424
Глава 19. Подгруппы, факторгруппы и произведения	429
§ 19.1. Смежные классы и факторизация	429
19.1.1. Нормальные подгруппы	430
19.1.2. Факторгруппы	431
§ 19.2. Коммутант	432
§ 19.3. Простые группы	434
§ 19.4. Композиционные факторы	436
§ 19.5. Полупрямые произведения	439
19.5.1. Полупрямое произведение групп	441
§ 19.6. p -группы и теоремы Силова	443
<i>Задачи для самостоятельного решения к главе 19</i>	445
Глава 20. Задание групп образующими и соотношениями	449
§ 20.1. Свободные группы	449
§ 20.2. Образующие и соотношения	450
§ 20.3. Образующие и соотношения групп платоновых тел	453
§ 20.4. Образующие и соотношения симметрической группы	457
20.4.1. Порядок Брюа	460
§ 20.5. Группы отражений и системы корней	462
20.5.1. Камеры Вейля	463
20.5.2. Положительные корни и стенки	465
20.5.3. Простые корни	466
§ 20.6. Графы Коксетера	468
<i>Задачи для самостоятельного решения к главе 20</i>	473
Ответы и указания к некоторым упражнениям	477
Стандартные обозначения и сокращения	509
Предметный указатель	513