

## Оглавление

|  |    |
|--|----|
| Предисловие .....  | 4  |
| Раздел 1. Введение .....   | 5  |
| Раздел 2. Вычеты, невычеты и арифметические операции<br>над ними .....         | 9  |
| Раздел 3. Критерий Эйлера и вычеты по простым модулям<br>вида $4k \pm 1$ ..... | 17 |
| Раздел 4. Квадратичный закон взаимности .....                                  | 31 |
| Раздел 5. Символ Якоби и обобщение КЗВ .....                                   | 50 |
| Раздел 6. Комбинаторное доказательство КЗВ .....                               | 56 |
| Раздел 7. Решения задач .....  | 63 |
| Литература .....   | 79 |

## Предисловие

Данная брошюра написана по итогам летних сборов для кандидатов в сборную Москвы на Всероссийскую олимпиаду школьников по математике, проводившихся с 19 по 29 июня 2022 г. Основной темой по теории чисел на этих сборах была такая классическая вещь, как *квадратичные вычеты*. В ходе подготовки к занятиям, а также в процессе обсуждения задач со школьниками удалось обнаружить много новых, красивых и малоизвестных фактов, связанных с этим сюжетом. Особенно обращают на себя внимание шесть (!) различных доказательств квадратичного закона взаимности, предложенных школьниками, являющимися соавторами данного текста. (Нельзя не отметить, что столько же доказательств придумал и сам Карл Фридрих Гаусс, впервые доказавший квадратичный закон взаимности.)

Впечатлившись таким энтузиазмом со стороны ребят, П. В. Бибииков захотел сохранить эти результаты, в результате чего и родился данный текст. Его основу составляют два листка, составленных П. В. Бибииковым и А. Ю. Кушниром, однако в текст добавлены и многие другие задачи, прежде всего из зарубежных олимпиад. Текст книги основан на развитии идей, представленных в этих листках, и построен в формате рассказа о наиболее известных и важных фактах из теории квадратичных вычетов, которые сопровождаются большим количеством задач, методических комментариев, экскурсов в историю математики и замечаний о связи обсуждаемых вопросов с проблемами из современной теории чисел.

Брошюра рассчитана на школьников, знакомых со следующими фактами из теории чисел:

- сравнения по модулю и их свойства;
- деление остатков по простому модулю;
- малая теорема Ферма:  $a^{p-1} \equiv_p 1$  при  $a \not\equiv_p 0$ ;
- теорема Вильсона:  $(p-1)! \equiv_p -1$ .

В отдельных задачах также полезно знать о порядках чисел по простому модулю, но эти знания необязательны. Мы стремились сделать данную книгу самодостаточной и кратко изложили эти результаты в тексте. Для более детального изучения основ теории чисел можно обратиться к книге [6].