

❖ **15.94.** Дан произвольный набор целых чисел. Обозначим через c_k сумму их k -х степеней.

1. Из последовательности (c_k) выделили три различных числа, образующих непостоянную арифметическую прогрессию. Докажите, что в исходном наборе есть отрицательное число.
2. Возможно ли, что $c_3 = 1$, $c_5 = 2015$?
3. Из последовательности (c_k) выделили четыре различных числа, образующих непостоянную арифметическую прогрессию. Приведите пример того, как такое могло быть.
4. Из последовательности (c_k) выделили сто различных чисел, образующих непостоянную арифметическую прогрессию. Докажите, что её разность больше 10^{30} .

М. А. Антипов

❖ **15.95.** Серединный перпендикуляр к стороне AC треугольника ABC пересекает отрезок BC и луч AB в точках D и E соответственно. Точки M и N — середины отрезков AC и DE соответственно.

1. Оказалось, что $\angle BAC = 2\angle BCA$. Докажите, что $DM \leq DB$.
2. Докажите, что $\angle ABC + \angle MBN = 180^\circ$, если $AB = BE$.
3. Точка $J \neq D$ на отрезке BD выбрана так, что $DE = JE$. Известно, что $\angle ABM = 90^\circ$. Найдите отношение площадей треугольников ADJ и BEJ .
4. При каких значениях α может быть выполнено равенство $\angle MBN = \alpha = \angle ABC$?

А. С. Кузнецов

10 класс

15.96. См. сюжет 15.94.

❖ **15.97.** Во всех пунктах O обозначает центр описанной окружности треугольника ABC , а I — центр его вписанной окружности.

1. Рассмотрим остроугольный треугольник ABC и его ортоцентр H . Оказалось, что точки B , O , H и C лежат на одной окружности. Докажите, что точка I лежит на той же окружности.
2. На описанной окружности треугольника ABC отметили точки X и Y — середины дуг AC и AB соответственно. Отрезок XY и сторона треугольника AC пересекаются в точке Z . Докажите, что

$$2IZ > AC - IC.$$

3. Дан неравнобедренный треугольник ABC , в котором $\angle A = 60^\circ$. Докажите, что точка пересечения прямых OI и BC равноудалена от точек A и I .

4. Дан остроугольный треугольник ABC . Пусть X — какая-то точка внутри треугольника. Описанные окружности треугольников AOX , BOX и COX пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках A_1 , B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что X является центром вписанной окружности ABC тогда и только тогда, когда X — ортоцентр $A_1B_1C_1$. *Жюри*

♣ **15.98.** Натуральные числа раскрашены в несколько (возможно, бесконечно много) цветов. Будем называть раскраску чисел *очаровательной*, если для любых натуральных чисел a и b среди чисел a , b и $a + b$ встречается ровно одна пара одного цвета.

Натуральные числа покрасили очаровательно.

1. См. задачу 15.93.1.
2. См. задачу 15.93.2.
3. Приведите пример очаровательной раскраски, в которой числа 20 и 30 одного цвета.
4. Бессмертный Михаил каждый день придумывает новую очаровательную раскраску. Докажите, что есть очаровательная раскраска, которую он никогда не придумает. *М. А. Антипов*

11 класс

♣ **15.99.** (*Рациональные многочлены.*) Будем для краткости называть n -рациональным многочленом многочлен степени n с рациональными коэффициентами, где n — натуральное число.

1. Укажите все n , при которых n -рациональный многочлен может иметь иррациональный корень.
2. При каком минимальном n существуют такие числа a и b , что каждое из них является корнем какого-то n -рационального многочлена, но их сумма $a + b$ не является корнем никакого n -рационального многочлена?
3. При каком минимальном n существует n -рациональный многочлен $P(x)$, который положителен при всяком рациональном x , но имеет иррациональный корень?
4. Пусть n -рациональный многочлен $P(x)$ таков, что для любого натурального y найдётся рациональное число x , для которого $P(x) = y$. Какие значения может принимать n ? *В. А. Вальтман*

♣ **15.100.** (*Волшебные кубики.*) Андрюша строит башенки из волшебных кубиков с ребром 1. Кубик можно поставить на другие кубики, если более половины площади его нижней грани касается дру-

гих кубиков. *Этажом* называется множество всех кубиков, находящихся на определённой высоте. Этажи нумеруются снизу вверх.

1. Если на первом этаже 2 кубика, может ли на третьем быть 6?
2. Если на первом этаже 3 кубика, может ли на втором быть 5?
3. Если на первом этаже 1009 кубиков, может ли на втором быть 2016?
4. Андрюша построил двухэтажную башню, на втором этаже которой оказалось m кубиков. Но тут подошёл Боря, убрал весь второй этаж, а на первый этаж добавил ещё один кубик (не передвигая остальных кубиков первого этажа). Обязательно ли Андрюша, не изменяя первого этажа, сумеет теперь поставить $m + 1$ кубик на второй этаж?

В. С. Самойлов

♣ **15.101.** (*Годные и негодные числа.*) Натуральное число называется *годным*, если оно делится на свою наибольшую цифру, и *негодным* в противном случае.

1. Существует ли непостоянная бесконечная арифметическая прогрессия, состоящая из годных чисел?
2. Каких чисел больше среди первого триллиона натуральных чисел: годных или негодных?
3. Докажите, что среди любых 20 последовательных чисел найдётся как годное, так и негодное.
4. Какое максимальное количество негодных чисел может идти подряд?

А. А. Солянин, А. А. Теслер