Занятие 3
Как считать баранов, или Деление в комбинаторике

— Скажи, пастух, как тебе удаётся так быстро считать баранов в стаде?
— Очень просто. Я считаю количество ног и делю на четыре.

Главная идея этого занятия: если при подсчёте каждый способ считался несколько раз, но при этом одно и то же число раз, количество способов надо разделить на это число. Мы уже использовали её для подсчёта числа пар (делим на 2) и вообще числа сочетаний. В задачах 3.1, 3.2, 3.3 с её помощью решаются новые типовые задачи. В частности, подсчитывается число перестановок с повторениями (см. задачи 3.1, 3.5, 3.6).

Попробуем разобраться, откуда деление возникает и когда приводит к ошибкам. Решение комбинаторной задачи часто начинается с поиска удачной кодировки, т. е. соответствия между объектами, которые надо подсчитать, и более простыми, уже знакомыми. Хорошая новость: оно не обязано быть взаимно однозначным. Пастух из эпиграфа устанавливает *многозначное соответствие* между баранами (нужными нам трудными объектами) и их ногами (лёгкими объектами). Почему после деления на количество ног у барана он получит верный ответ? Потому что у всех баранов одинаковое количество ног. Назовём это условие «*принципом равноправия баранов*».

К верному ответу может вести несколько путей. В частности, к задачам 3.1бв, 3.3б, 3.8 приведены решения, связанные с установлением как однозначного соответствия (деления не требуется), так и многозначного (деление необходимо). Обсуждать ли дополнительно решения без деления, решает учитель. Заметим также, что вместо разных букв (например, A_1 и A_2 в задаче 3.1б) на уроке нагляднее использовать цветные мелки.

К делению может привести и однозначное соответствие. Иногда «большое» множество (все ноги) удобно разделить на равновеликие группы (баранов) и выделить *особое* подмножество (правых передних ног) так, чтобы в каждой группе было ровно по одному особому элементу. Тем самым устанавливается соответствие между особым подмножеством и частями-баранами, поэтому таких ног столько же, сколько баранов (см. задачу 3.4), а размер группы получается делением целого. Если размер целого неизвестен, то так можно доказать его делимость на количество групп (см. задачу 3.10).

Явное установление многозначного соответствия и проверку «равноправия баранов» часто сокращают до подсчёта, сколько раз учтён каждый объект, и ссылки на равноправие объектов. В этом нет ничего плохого, если школьник сохраняет понимание, что подсчитываются *не те объекты* («ноги»), и понимает, как их *связать с искомыми* («баранами»), а также понимает, как *доказать* «равноправие баранов». Иначе он неизбежно будет путаться, когда надо делить на два, а когда нет, и будет ошибаться в случаях, когда способы подсчитаны по несколько раз, но не каждый способ подсчитан одно и то же число раз (см. комментарий к решению 3.7). Пример такой ошибки, разобранный в задаче 3.9, порождён реальной ситуацией на занятии кружка. Если кто-то из ребят ошибётся подобным образом в другой задаче, считайте, что он подарил вам интересное задание на поиск ошибки для остальных участников.

Задача 3.9а обращает внимание на один из способов проверки правильности ответа: количество способов должно быть целым.

Задача 3.1. Сколько различных «слов» (в том числе бессмысленных) можно составить из всех букв слова: а) СУП; б) КАША; в) МОЛОКО; г) АНАНАС?

Обсуждение. а) Нетрудно выписать все анаграммы слова СУП в лексикографическом порядке: сначала на первом месте С, потом У, потом П. Это перестановки трёх элементов, их $3! = 6$.

б) Первая мысль: теперь букв не 3, а 4. Поэтому и ответ будет не $3! = 6$, а $4! = 24$. Кто так думает, пусть попробует написать все анаграммы слова КАША. Это не так долго, потому что на самом деле их меньше 24. В каком порядке писать, чтобы ничего не пропустить? Можно снова в лексикографическом. При этом можно не писать слова, а рисовать дерево перебора. Увы, оно оказывается нерегулярным, так как от больших ветвей отходит различное число ветвей следующего «этажа»: если на первом месте К, то на втором могут быть только А или Ш, а если на первом месте А, то на втором месте могут быть К, А или Ш. Правило умножения не работает, но, дорисовав дерево до конца, видим, что слов 12.

Можно избежать непосредственного перечисления, если организовать выбор более изобретательно. Сначала выберем 2 места из четырёх для буквы А. Это можно сделать

$$C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6$$

способами. Для каждого из них на двух оставшихся местах можно разместить буквы К и Ш двумя способами. Правило умножения заработало, получаем $6 \cdot 2 = 12$ слов.

Получив двумя способами правильный ответ 12, вспомним неправильный, 24. Если 24 разделить на 2, получится как раз 12. Легко получаемый ответ 24 был бы правильным, если бы все 4 буквы были разными. А давайте, как французы, сделаем две разные буквы А: $А_1$ и $А_2$. Рассмотрим все анаграммы слова $КА_1ША_2$ — их 24. Но на самом деле эти индексы нам неинтересны. Стирая их, будем получать анаграмму слова КАША, правда, по несколько раз. Например, сама КАША получится стиранием из слов $КА_1ША_2$ и $КА_2ША_1$. Давайте выпишем сверху анаграммы слова КАША, а снизу — слова $КА_1ША_2$ и соединим отрезками соответствующие слова вверху и внизу (см. рис. 3.1, изображены лишь некоторые анаграммы). Видим, что из каждого верхнего слова выходят вниз ровно по два отрезка (как две ноги у барана). Это верно всегда, так как есть два способа расставить индексы при буквах А. Значит, в нижнем списке вдвое больше слов («ног») и, чтобы узнать число слов вверху («баранов»), надо число слов внизу поделить на 2.

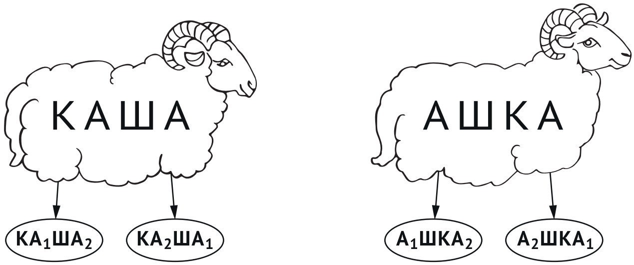


Рис. 3.1

в) **Решение 1.** Если сначала сделать из букв О три *различные* буквы $О_1$, $О_2$ и $О_3$, то из слова $МО_1ЛО_2КО_3$ получится 6! анаграмм. Установим соответствие между этими анаграммами («ногами») и анаграммами слова МОЛОКО («баранами»). В слове МОЛОКО можно $3! = 6$ способами расставить индексы при равноправных буквах О, то же верно для каждой из анаграмм этого слова (т. е. из каждого барана растёт по 6 ног, см. рис. 3.2). И наоборот, при стирании индексов каждая анаграмма слова МОЛОКО получится (будет учтена) ровно 6 раз. Поэтому их в 6 раз меньше, и мы получаем ответ: $6! : 6 = 5! = 120$.

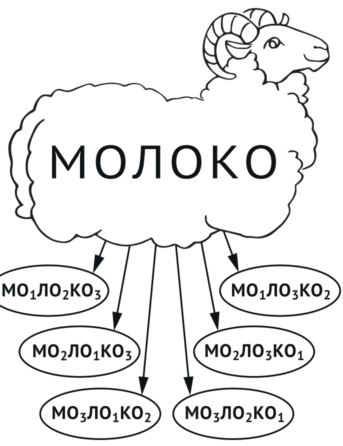


Рис. 3.2

Решение 2. Выберем сначала три места из шести для буквы О одним из

$$C_6^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$$

способов, а потом $3! = 6$ способами расставим согласные. Всего получаем $20 \cdot 6 = 120$ способов.

г) И здесь удобнее сначала посчитать анаграммы слова $А_1Н_1А_2Н_2А_3С$ — их $6!$, затем мысленно соединить их с анаграммами слова АНАНАС (полученными стиранием индексов). Каждому слову без индексов будет соответствовать несколько слов с индексами. Сколько? Столько, сколько есть способов расставить индексы. Индексы 1, 2, 3 при буквах А можно расставить $3! = 6$ способами, индексы при буквах Н — $2! = 2$ способами. Поскольку эти две расстановки можно делать независимо, всего есть $6 \cdot 2 = 12$ способов. Значит, слов с индексами в 12 раз больше. Разделив их число на 12, найдём число слов без индексов: $6! : 12 = 60$.

Ответ: а) 6; б) 12; в) 120; г) 60 слов.

Замечание 1. Мы рассмотрели одну из типовых задач классической комбинаторики. Она называется задачей о числе перестановок с повторениями и в общем виде формулируется так.

Пусть имеется n_1 объектов первого типа, n_2 объектов второго типа, ..., n_k объектов k-го типа, причём

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n.$$

Сколькими способами можно переставить все объекты между собой?

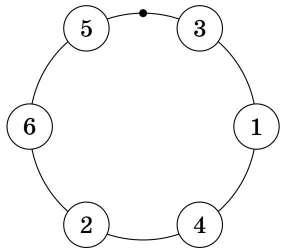
Ответ в общем виде описывается формулой

$$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}.$$

Замечание 2. Сочетания являются частным случаем перестановок с повторениями для $k = 2$.

Задача 3.2. Сколько разных ожерелий с застёжкой можно составить из шести разных бусин?

Обсуждение. Изобразим места для бусин в виде шести пустых кружочков, застёжку отметим точкой вверху, а сами бусины занумеруем числами от 1 до 6. Тогда каждому ожерелью соответствует рисунок такого типа:



Теперь, если пройтись от застёжки по часовой стрелке и выписать встречающиеся цифры, мы получим шестизначное число, в котором каждая из цифр от 1 до 6 используется по одному разу; для ожерелья на рисунке это будет 314265. И обратно, по любому такому числу мы можем восстановить ожерелье. Получили взаимно однозначное соответствие? Не совсем: ведь если перевернуть ожерелье, оно не изменится, а число получится другое: 562413. Итак, каждому ожерелью соответствуют *два* числа (две ноги барана). Есть $6! = 720$ чисел, а ожерелий вдвое меньше: $720 : 2 = 360$.

Ответ: 360 ожерелий.

Задача 3.3. Сколькими способами можно разместить шестерых детей на карусели с шестью сиденьями, если:

а) все сиденья разных цветов;

б) сиденья одинаковые, важно только, кто за кем сидит?

Обсуждение. Пусть детей зовут А, Б, В, Г, Д, Е.

а) Вместо цветов занумеруем сиденья числами 1, 2, 3, 4, 5, 6, начав с любого и двигаясь по часовой стрелке. Закодируем каждый способ рассадки словом из букв А, Б, В, Г, Д, Е: номер буквы в слове соответствует номеру сиденья. Способов столько же, сколько перестановок 6 букв, т. е. $6! = 720$.

б) **Решение 1.** Пусть дети как-то расселись на карусели с незанумерованными сиденьями: Б, за ним Е, потом Г, дальше последовательно Д, В и А. Сколькими способами можно восстановить нумерацию? Можно начать нумеровать с Б, получится рассадка БЕГДВА. Аналогично можно начать нумерацию с любого из детей, получив соответственно способы ЕГДВАБ, ГДВАБЕ, ДВАБЕГ, ВАБЕГД, АБЕГДВ. Итак, каждому «барану» — способу без нумерации — соответствует 6 «ног» — способов с нумерацией. Значит, последних в 6 раз больше, а способов без нумерации $\frac{6!}{6} = 5! = 120$.

Решение 2. Вид ответа задачи 3.3б наводит на мысль, что его можно было получить и без деления, поставив детей в очередь, но не всех шестерых, а только пятерых. Так и есть. Если мы для пятерых знаем, кто за кем сидит, то кто сидит за шестым, определяется однозначно. Поэтому можно всегда начинать рассадку с Е. А для остальных пяти останутся 5 мест, что даёт ответ: $5! = 120$ вариантов рассадки.

Замечание. Не забывайте проверять себя по возможности на малых числах. Для двух детей, очевидно, возможен только $1! = 1$ способ, для трёх — $2! = 2$. При желании можно выписать и все $3! = 6$ способов для четырёх детей.

Задача 3.4. У скольких чисел от 0 до 999 999 сумма цифр делится на 5?

Решение. Разобьём числа на пятёрки последовательных чисел: $(0, 1, 2, 3, 4)$, $(5, 6, 7, 8, 9)$, $(10, 11, 12, 13, 14)$ и т. д. В каждой пятёрке окажутся 5 последовательных чисел из одного десятка, перехода через десяток нет, поэтому их суммы цифр тоже образуют пятёрку последовательных чисел: $(s, s+1, s+2, s+3, s+4)$. Нетрудно убедиться, что в такой пятёрке сумм ровно одно число кратно 5. Значит, искомых чисел столько же, сколько пятёрок, т. е. получаем ответ $1\,000\,000 : 5 = 200\,000$.

Комментарий. Ровно такой же ответ и решение для задачи «У скольких чисел от 0 до 999 999 сумма цифр даёт остаток r при делении на 5?». Тем самым можно все числа от 0 до 999 999 разбить на 5 равных групп с равными остатками внутри каждой группы.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 3.5. Сколько различных анаграмм можно составить из слова ПАМПАРАМПАМПАМ?

Задача 3.6. Туристы взяли риса на три завтрака, пшена на пять завтраков и геркулеса на шесть завтраков. Сколькими способами можно составить утреннее меню на двухнедельный поход? (Каждое утро варится каша из одной крупы.)

Задача 3.7. Сколько ожерелий без застёжки можно составить из шести разных бусин?

Задача 3.8. а) В классе 10 мальчиков и 10 девочек. Сколькими способами они могут образовать 10 танцевальных пар, где мальчик танцует с девочкой?

б) В классе 20 человек. Каждый день дежурят двое. Сколькими способами можно составить график дежурств на 10 дней, чтобы никто не дежурил дважды?

в) Сколькими способами можно разбить 20 человек на пары?

Задача 3.9. Рассмотрим задачу: «Сколько различных ожерелий без застёжки можно составить из трёх одинаковых синих и трёх одинаковых красных бусин?» Незнайка предложил следующий план решения.

Возьмём ответ из задачи про ожерелье из шести разных бусин (задача 3.6). Так как все синие бусины равноправны, результат надо уменьшить в $3! = 6$ раз, как в задачах про анаграммы. А так как равноправны и три красные бусины, то надо ещё один раз поделить на 6.

а) Убедитесь, что Незнайка получит неверный ответ.

б)* Найдите ошибку в рассуждениях Незнайки.

в) Найдите верный ответ.

Задача 3.10. Есть одинаковые домино 1×2: 50 белых и 50 чёрных. Из них составляют квадрат 8×8 так, чтобы каждое домино граничило (по отрезку) хотя бы с одним домино другого цвета. Докажите, что число способов составить квадрат кратно 4.

Ответы и решения

3.5. Ответ: $\dfrac{14!}{5! \cdot 4! \cdot 4!} = 1\,261\,260$ анаграмм.

Всего букв 14. При этом А встречается 5 раз, а П и М по 4 раза.

Решение 1. Расставим индексы так, чтобы все буквы стали разными. Есть 14! анаграмм полученного слова. Получим все эти слова (т. е. установим соответствие) из анаграмм слова ПАМПАРАМПАМПАМ. Есть 5! способов расставить индексы при буквах А и по 4! способов расставить их при буквах П и при буквах М. Эти расстановки можно делать независимо, поэтому из каждого слова без индексов получится $5!\cdot 4!\cdot 4!$ слов с индексами. Следовательно, слов без индексов в $5!\cdot 4!\cdot 4!$ раз меньше, чем с индексами.

Решение 2. Мы имеем перестановки с повторениями:

$$\mathrm{P}(5,\,4,\,4)=\frac{14!}{5!\cdot 4!\cdot 4!}.$$

3.6. Ответ: $\dfrac{14!}{3!\cdot 5!\cdot 6!}=168\,168$ меню.

Решение. Закодируем каши буквами Р (рис), П (пшено) и Г (геркулес). Каждый завтрак кодируется одной буквой, а двухнедельное меню завтраков — словом из 14 букв. Задача свелась к подсчёту количества анаграмм слова

РРРППППППГГГГГГ.

По формуле перестановок с повторениями

$$P(3,\,5,\,6)=\frac{14!}{3!\cdot 5!\cdot 6!}.$$

3.7. Ответ: 60 ожерелий.

Решение. Как и в задаче 3.2, задаём ожерелье, расставляя в кружочках цифры от 1 до 6. Рассмотрим 6! шестизначных чисел, составленных из разных цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6. Сопоставим каждому числу ожерелье, вписывая по порядку цифры числа в кружочки, начиная с верхнего кружочка и идя по часовой стрелке. Сколько чисел дадут одно и то же ожерелье? Как и в задаче 3.2, мы можем переворачивать ожерелье. А ещё, поскольку нет застёжки, мы можем поворачивать ожерелье на 1, 2, 3, 4, 5 бусин. Всего есть 6 положений (включая исходное), которые получаются поворотами, и ещё 6 положений, которые из них получаются переворотом. Итого есть 12 положений ожерелья, соответствующие 12 различным числам (например, если исходному положению соответствует число $314\,265$, то поворотам — числа $142\,653$, $426\,531$, $265\,314$, $653\,142$, $531\,426$, а переворотам — числа $562\,413$, $356\,241$, $135\,624$, $413\,562$, $241\,356$, $624\,135$). Значит, ожерелий в 12 раз меньше, чем чисел, т. е. их $6!:12=60$.

Чтобы «пощупать задачу руками», можно начать с трёх бусин. Получится $3!:6=1$ ожерелье. Нетрудно убедиться, что любое расположение по кругу трёх бусин поворотом или переворотом (симметрией) переводится в любое другое. Если бусин четыре, то ожерелий $4!:8=3$. И действительно, расположив напротив данной бусины одну из трёх оставшихся, мы однозначно определяем ожерелье.

3.8. Ответ: а) $10!$ способов; б) $\dfrac{20!}{2^{10}}$ способов; в) $\dfrac{20!}{2^{10}\cdot 10!}=$ $=1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot 17\cdot 19$ способов.

Решение. а) Попросим мальчиков по очереди выбрать себе партнёрш. Первый может пригласить любую из десяти девочек, второй — любую из девяти оставшихся и т. д. Поэтому способов образовать 10 пар столько же, сколько способов поставить десять девочек в очередь, т. е. $10!$.

б) **Решение 1.** Из упорядоченного списка пар можно сделать упорядоченный список класса: выпишем первую пару в любом порядке, затем вторую и т. д. Нам надо будет 10 раз выбрать порядок в паре, поэтому из списка пар можно получить 2^{10} списков класса. И наоборот, из упорядоченного списка класса список пар получаем так: первые двое образуют первую пару дежурных, третий и четвёртый — вторую, пятый и шестой — третью и т. д. Итак, есть $20!$ возможных списков класса, значит, списков дежурных в 2^{10} раз меньше.

Решение 2. Первую пару из 20 человек можно выбрать $\dfrac{20\cdot 19}{2}$ способами. Вторую мы выбираем из 18 человек, способов для этого $\dfrac{18\cdot 17}{2}$. Выбрать 10 пар можно

$$\frac{20\cdot 19}{2}\cdot\frac{18\cdot 17}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{2\cdot 1}{2}=\frac{20!}{2^{10}}$$

способами.

в) **Решение 1.** Эта задача похожа на предыдущую. Но на этот раз неважно, какая именно пара выбрана первой, какая второй и т. д. Поэтому если решать её как предыдущую, то каждый способ будет подсчитан столько раз, сколькими способами можно упорядочить список из 10 пар, т. е. 10! раз. Разделив ответ предыдущей задачи на 10!, получим ответ к этому пункту.

Решение 2. Пару надо найти для каждого. Начнём с самого высокого, пусть это Петя. Пару для Пети можно выбрать 19 способами. Пусть Петя и его напарник отойдут в сторону. Теперь выберем пару для самого высокого из оставшихся (скажем, Васи) одним из 17 способов (исключены Петя, его напарник и Вася). Затем для самого высокого из оставшихся выберем пару одним из 15 способов и т. д. На десятом шаге пару для одного из двоих оставшихся можно выбрать единственным способом. Получаем ответ сразу в виде $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 17 \cdot 19$.

3.9. Ответ: в) 3 ожерелья.

Решение. а) Незнайка получит ответ $60 : 6 : 6$. Он дробный и верным быть не может.

б) Слово «равноправны» Незнайка употребил некорректно. «Равноправность» — это лишь соображение. С его помощью Незнайка должен был показать, что каждый способ подсчитывается *одинаковое* число раз.

Незнайка правильно посчитал, что есть 36 способов «расставить индексы» в ожерелье из 3 красных и 3 синих бусин. Но он не учёл, что некоторые разноцветные ожерелья могут быть получены из двуцветного ожерелья *разными способами*. Например, из КСКСКС получаются как $К_1С_1К_2С_2К_3С_3$, так и $К_3С_3К_1С_1К_2С_2$, но только вот эти ожерелья одинаковы: второе получается из первого поворотом всего ожерелья на 2 бусины. Тем самым получается группа меньше чем из 36 разноцветных ожерелий, и, значит, на 36 делить нельзя. Поэтому не удаётся таким соответствием свести задачу про три синие и три красные бусины к задаче о шести разных бусинах.

в) Если не умничать, а просто перебирать всевозможные ожерелья из трёх синих и трёх красных бусин, можно убедиться, что их всего три: КККССС, ККСКСС и КСКСКС. Перебор можно организовать так: расставить 3 красные бусины по кругу, а затем распределить синие бусины в промежутки между ними. Есть 3 случая: заполнены 1, 2 или 3 промежутка. Убедитесь, что для каждого случая получается ровно 1 вариант.

3.10. Домино в левом верхнем углу может быть белым (Б) или чёрным (Ч), вертикальным (В) или горизонтальным (Г) — всего 4 варианта. В зависимости от варианта способы делятся на 4 группы: БВ, БГ, ЧВ, ЧГ. Группы равноправны, поэтому они все одинакового размера. Значит, общее число способов делится на 4.

Равноправие групп аккуратно доказывается с помощью соответствия. Рассмотрим два преобразования, которые сохраняют нужные свойства способа: 1) *симметрия* относительно диагонали из верхнего левого угла в правый нижний; 2) *перекраска* всех домино в противоположный цвет. Симметрия меняет расположение углового домино, но не меняет цвет; значит, она устанавливает взаимно однозначное соответствие БВ с БГ, а ЧВ с ЧГ. Перекраска меняет цвет, но не разбиение на домино, тем самым она устанавливает взаимно однозначное соответствие БВ с ЧВ, а БГ с ЧГ.

Решения с симметрией относительно вертикальной или горизонтальной осей не проходят: есть разбиения, которые при такой симметрии *не меняются*.

► К задачам этого занятия можно добавить дополнительные задачи Д16—Д23, Д26б, Д41а, Д65, Д79*—Д81*. ◄