Предисловие

> Математика не развивается как монотонное возрастание количества несомненно доказанных теорем, но только как непрерывное улучшение догадок при помощи размышления и критики, при помощи доказательств и опровержений.
>
> *Имре Лакатош* [71] (пер. И. Н. Веселовского)

Какова роль доказательства в математике? В последние годы мы наблюдали бунт против преподавания математики как вереницы непоколебимых логических доводов, при помощи которых из фундаментальных принципов строятся универсальные истины. В наш век компьютерного исследования закономерностей в математике маятник качнулся столь далеко, что некоторые даже объявили о «смерти доказательства» [51]. Традиционные доказательства исчезают из программы старшей школы и даже младших курсов университета.

Об этой потере не стоит горевать, если то, от чего мы отказываемся, — это ложное понимание математики как формальной системы без необходимости научного исследования, эксперимента и открытия. Однако существует весьма реальная опасность, что из-за нашего рвения выбросить за борт все неправильное мы потеряем саму сущность математики, которая неразрывно связана с доказательствами. Это возвращает нас к нашему изначальному вопросу: какова роль доказательства в математике?

Имре Лакатош в книге «Доказательства и опровержения» [71] сделал упор на один важный аспект этой роли. Ему принадлежит ироничное замечание, что то, что доказано, должно быть верным и поэтому неопровержимым. Вдохновением для Лакатоша служил Карл Поппер, и его заглавие отсылает к работе Поппера «Предположения и опровержения» [101]. Основное положение Поппера состоит в том, что наука продвигается не по мере установления истины, а по мере выдвижения гипотез, которые можно проверить на соответствие реальности, которые сохраняются, пока они согласуются с реальностью, и которые уточняются или отвергаются, если предсказанное ими оказывается неверным.

Лакатош берется разобраться с вопросом: применимо ли это понимание также и к математике? На первый взгляд работа Поппера кажется не относящейся к делу. В теореме Пифагора нет ничего приблизительного. Невозможно представить, что кто-нибудь однажды откроет прямоугольный треугольник, у которого сумма квадратов катетов не равняется квадрату гипотенузы. Или же нет?

На самом деле существуют метрические пространства и связанные с ними геометрии, в которых теорема Пифагора неверна. Это нечестная нападка, поскольку предполагается, что теорема Пифагора применяется лишь в евклидовой геометрии со стандартной евклидовой метрикой, однако в этом и состоит мысль Лакатоша: важная часть развития математики состоит в том, чтобы разыскать те самые предположения, лежащие в основе, и затем уточнить математические понятия, с которыми мы работаем.

Лакатош иллюстрирует этот процесс, рассказывая историю формулы Эйлера, которая связывает число вершин, ребер и граней многогранника. В приложении он упоминает связь этой точки зрения с развитием понятия равномерной непрерывности. Я опирался на его идеи, когда писал свою книгу «Радикальный подход к вещественному анализу». Математика оживает по мере того, как мы видим, как экзотические на вид определения возникают при попытках увязать известные нам закономерности математики с контрпримерами, которые появляются по мере распознавания и определения границ действия наших предположений.

Но это не конец истории о роли доказательства в математике. Есть и другие движущие силы, которые имеют мало отношения к уточнению определения или границ предположений. Они связаны с поиском доказательства — процессом, лежащим в основе деятельности математика. В своей лекции памяти Роуза Болла в 1928 г. Г. Х. Харди выразил свой взгляд на природу математического доказательства. Курсив принадлежит ему.

> Я сам всегда думал о математике как в первую очередь о *наблюдателе*, человеке, который пристально смотрит на далекую горную цепь и отмечает свои наблюдения. Его цель просто состоит в том, чтобы ясно различить как можно больше вершин и сообщить о них другим. Некоторые вершины он различает без труда, другие не столь хорошо видны. Он четко видит вершину А, тогда как вершина Б показывается лишь на короткое время. Наконец он отмечает горный хребет, который начинается в вершине А, и, проследив за ним до конца, он выясняет, что тот

> приводит в Б. Теперь вершина Б зафиксирована в его поле зрения, и от этой точки он может переходить к дальнейшим открытиям. В других случаях он может различить гребень, который теряется вдали, и предположить, что тот ведет к вершине, скрытой облаками или расположенной ниже горизонта. Но когда он видит вершину, он верит, что она там есть, именно потому, что он ее видит. Если он хочет, чтобы кто-то другой ее увидел, он *указывает на нее*, либо напрямую, либо посредством цепочки других вершин, которые привели его самого к тому, что он ее увидел. Когда его ученик также увидит эту вершину, исследование, рассуждение, *доказательство* заканчивается.
>
> Это грубая аналогия, но я уверен, что она в целом указывает верное направление. Развивая ее до конца, мы пришли бы к парадоксальному заключению, что мы можем, в конечном счете, только лишь *указывать*; такие доказательства мы с Литтлвудом называем *болтовней*, это красивые риторические приемы для произведения психологического впечатления, рисунки на доске во время лекции, приспособления для стимулирования воображения учеников. Это, конечно, не полностью так, но значительная доля истины в этом есть. Этот образ дает нам подлинное приближение к математической педагогике, с одной стороны, и к математическому открытию — с другой: лишь простодушный профан представляет себе, что математики совершают открытия, поворачивая ручку какой-то чудесной машины. Наконец, этот образ по крайней мере дает нам грубое изображение гильбертовского метаматематического доказательства, такого доказательства, которое является *основанием* для умозаключения и целью которого является *убедить*.

Я хотел бы развить метафору Харди в другом направлении, представив доказательства как формы исследования. Существуют такие условия, в которых возможно стоять вдалеке, отмечать последовательность горных хребтов, которые приведут к вершине, и таким образом действительно указать путь к наивысшей точке. Более часто дорогу к вершине можно открыть, лишь пойдя и покорив эту вершину. Это процесс, в котором будут неудачные попытки, густой туман и много тяжелой работы. При этом полезно интуитивно чувствовать, как устроена местность, но эта дорога почти всегда полна сюрпризов.

Математики часто распознают истину, не зная, как доказать ее. Подтверждения бывают разных видов. Доказательство — лишь один из них. Но одно лишь знание, что нечто является истинным, далеко от понимания, почему оно истинно и как это связано с остальным нашим знанием. Поиск доказательства — это первый шаг в поиске понимания.

Лучше всего я могу проиллюстрировать свою мысль, описав настоящую математику. Я хочу сделать это, рассказав историю недавних открытий на границе между алгеброй и комбинаторикой — историю гипотезы о знакочередующихся матрицах, выдвинутой Уильямом Миллсом, Дэвидом Роббинсом и Говардом Рамси. В течение пятнадцати лет было известно, что эта гипотеза верна. Это было подтверждено многими способами: удивительной простотой ее формулировки, численной проверкой первых двадцати случаев, неожиданными следствиями из нее, которые удалось доказать. Но ничто из этого не было доказательством. Когда в 1995 г. доказательство наконец было обнаружено, оно оказалось связанным с неожиданной областью и дало огромное количество новых идей и интересных задач.

Цель этой книги состоит не только в том, чтобы описать открытие новой математики, но еще и в том, чтобы ввести вас в эту область и дать вам самим подняться на некоторые из этих вершин, недавно появившихся на карте. Это не полный отчет о всех тех чудесах, которые были открыты, а скорее экскурсия по некоторым из них, которая, как я надеюсь, вдохновит вас на то, чтобы вернуться и начать ваши собственные исследования.

Основа заключена в главах 1 и 6, с завершающими комментариями в § 7.4. Можно прочитать только их и ничего более, но даже при поверхностном чтении полезно будет ознакомиться с главами 2 и 3. В этих главах описывается контекст нашего рассказа и изучаются фундаментальные понятия, на которых основана гипотеза о знакочередующихся матрицах: производящие функции, рекуррентные формулы, разбиения, плоские разбиения, пути на решетке и вычисление определителей. В основе этой истории лежит теория инвариантов, развивавшаяся в XIX веке в работах Коши, Якоби, Кэли, Сильвестра и Макмагона. И даже на этих исхоженных дорожках мы найдем результаты и интерпретации, которые были открыты лишь недавно. Этот базовый материал завершается в § 3.5 описанием и объяснением алгоритма Доджсона для вычисления определителей: той математики, благодаря которой Роббинсу и Рамси суждено было прийти к открытию знакочередующихся матриц.

Каждая из глав 4, 5 и 6 посвящена единственному доказательству. В главе 4 мы следуем за Иэном Макдональдом через теорию симметрических функций к доказательству результата, впервые сформулированного в качестве гипотезы Макмагоном — производящей функции для ограниченных симметричных плоских разбиений. Именно из этой точки Макдональд разглядел нашу вторую вершину — его гипотетическую производящую функцию для ограниченных циклически симметричных плоских разбиений.

Глава 5 включает в себя доказательство гипотезы Макдональда — истинный пример математической прозорливости. Пока Миллс, Роббинс и Рамси искали доказательство своей гипотезы, они натолкнулись на связь с плоскими разбиениями и гипотезой Макдональда. Они подошли к ней с новой стороны и поэтому были вооружены дополнительными знаниями, которые оказались решающими. Эта глава также дает возможность исследовать мир простых гипергеометрических рядов — еще одну составляющую окончательного доказательства гипотезы о знакочередующихся матрицах.

Доказательство исходной гипотезы Миллса, Роббинса и Рамси было найдено Дороном Зейльбергером в 1995 г. Его доказательство представлено в гл. 7. Оно проходит по территории, которая впервые была открыта физиками, работающими в области статистической механики, и основано на теории ортогональных многочленов.

Эти три основных доказательства трудны, особенно для тех, кто раньше не имел дела со сложными доказательствами, однако единственным требованием для их понимания является владение линейной алгеброй и желание познакомиться с современным математическим исследованием. Упражнения предназначены для того, чтобы помочь вам подготовиться, а также чтобы показать различные достопримечательности и виды по дороге. Как мне кажется, намеченные мной пути восхождения являются самыми легкими, но ни один из них не будет легким, если только вы не захотите действительно пройти по нему сами. Это значит не только согласиться с тем, что этот путь приводит к нужному результату, но еще и прийти к собственному пониманию используемых идей и причин, по которым эти теоремы верны. Именно в этом и заключается математическое доказательство. Это не просто подтверждение истинности математического утверждения. На очень раннем этапе своего пути Миллс, Роббинс и Рамси уже знали, что их гипотеза о знакочередующихся матрицах верна. Они искали доказательство, поскольку хотели понять, почему она верна, и увидеть, куда может их привести это понимание.

Теперь скажем несколько слов о терминологии. *Гипотеза* — это такое утверждение, что есть убеждение в его истинности, но нет доказательства. Строго говоря, гипотезы о знакочередующихся матрицах больше не существует. Теперь это теорема о знакочередующихся матрицах. Поскольку задача нашего рассказа отчасти состоит в том, чтобы объяснить роль тех или иных гипотез в недавних математических открытиях, я решил говорить об этих результатах как о гипотезах, сохраняя их исторический статус. Принимая такое решение, я беру на себя обязательство четко указывать, какие из гипотез уже доказаны.

Я обязан многим людям, которые прочли ранние версии этой книги и сделали полезные предложения по ее улучшению. Главными из них были Арт Бенджамин и Дженнифер Квинн, которые прочли всю рукопись и отловили множество моих ошибок. Я хотел бы особенно поблагодарить Кришну Алладлюдя, Джорджа Эндрюса, Дика Аски, Родни Бакстера, Доминика Фоата, Тину Гарретт, Айру Гесселя, Гоуниоу Ханя, Кристиана Краттенталера, Грега Куперберга, Алена Ласку, Ину Линдеман, Иэна Макдональда, Петера Пауле, Джима Проппа, Дэвида Роббинса, Ричарда Стенли, Денниса Стентона, Ксавье Вьенно и Дорона Зейльбергера. Я также хотел бы поблагодарить Кейта Денниса, Хулио Гонсалеса Кабийона, Карен Паршалл, Боба Проктора и Джима Таттерсалла за ссылки. Наконец, я признателен Лоран Коулс из издательства «Cambridge University Press» и Дону Альберсу из Американской математической ассоциации за их постоянную поддержку и воодушевление.

Дэвид М. Брессу,
www.macalester.edu/~bressoud
Макалестер-колледж, Сент-Пол, Миннесота