Введение

В 50-е годы прошлого века, в связи с исследованиями процессов, возникающих при взрыве бомбы, наблюдалось бурное развитие газовой динамики (обобщенные решения законов сохранения, устойчивые разностные схемы расчета решений). Тогда же появились первые макроскопические (гидродинамические) модели, в которых транспортный поток уподобляется потоку «мотивированной» сжимаемой жидкости (М. Лайтхилл и Дж. Уизем, П. Ричардс), и первые микроскопические модели (следования за лидером), в которых явно выписывается уравнение движения каждого автомобиля (А. Рёшель, Л. Пайпс и др.). В модели Лайтхилла—Уизема (—Ричардса) (1955) транспортный поток уподобляется потоку сжимаемой жидкости и описывается законом сохранения количества (погонной плотности) автомобилей. При этом в модели постулируется существование функциональной зависимости (уравнения состояния) между величиной потока автомобилей (= скорость × плотность) и плотностью. Эту зависимость часто называют *фундаментальной диаграммой* (как правило, вогнутая функция). Собственно, в эту зависимость и «зашита» мотивация в простейших моделях.

В последующие годы класс микро- и макромоделей был значительно расширен. В современном макроскопическом подходе (А. Эу и М. Раскль, 2000) транспортный поток часто описывается нелинейной системой гиперболических уравнений (для плотности и скорости потока) с диффузией (Х. Пейн, Р. Кюне, Б. Кернер и П. Конхойзер). При этом уравнение состояния «зашивается» во второе уравнение этой системы как стремление водителей двигаться с желаемой скоростью.

В современном микроскопическом подходе преобладают модели типа «разумного водителя», в которых ускорение автомобиля описывается некоторой функцией от скорости этого автомобиля, расстояния до впереди идущего автомобиля (лидера) и скорости относительно лидера (М. Трайбер, 1999). При этом в таких моделях и время может течь дискретно, и сама динамика движения автомобилей может быть стохастической (марковской). Как правило, тогда такие модели называют *моделями клеточных автоматов*. В приложении М. Л. Бланка продемонстрирован один из способов того, как с помощью простейших моделей клеточных автоматов можно получать (математически строго) правдоподобные макроскопические уравнения состояния транспортного потока (например, треугольную фундаментальную диаграмму).

Продолжая аналогию с газовой динамикой, И. Пригожин полвека назад (а затем С. Павери-Фонтана, Д. Хельбинг и др.) предложил описывать транспортный поток кинетическим уравнением (типа Больцмана с «интегралом взаимодействия автомобилей» вместо «интеграла столкновения частиц газа»). При таком подходе макроскопическая модель получается из кинетической подобно тому, как система уравнений Эйлера получается из уравнения Больцмана.

Отметим ввиду вышесказанного, что задача математически строгого обоснования кинетической модели, исходя из микроскопической, так же как и задача обоснования макроскопической модели, исходя из кинетической, является открытой. Более того, в режимах, соответствующих «фазовому переходу» в транспортном потоке, такое обоснование, по-видимому, принципиально невозможно: нельзя осуществить соответствующий скейлинг, нельзя перейти к динамике средних, нельзя пользоваться эргодичностью системы (инвариантная мера не единственна), неясно, как обрывать (замыкать) моментную цепочку зацепляющихся уравнений. В таких режимах можно лишь нестрого говорить о похожести моделей.

Несмотря на то что с момента появления первых фундаментальных работ прошло более полувека, по мнению ряда известных специалистов в области математического моделирования дорожного движения (К. Нагель, Х. Махмасани, М. Шрекенберг и др.), проблема образования предзаторных и заторных ситуаций еще до конца не изучена (и сродни проблеме описания турбулентных течений). Используя терминологию, предложенную Б. С. Кернером, можно сказать, что на данный момент нет общепринятого подхода, описывающего поведение движения автотранспорта в области синхронизированного потока. Иначе говоря, если автомобильный поток уподобляется жидкости, то наиболее сложная для моделирования ситуация — это замерзающая жидкость. Подтверждением вышесказанному может служить тот факт, что разные коллективы, занимающиеся моделированием транспортных потоков, как правило, используют разные модели: начиная от модели Лайтхилла—Уизема (А. А. Куржанский и др.), заканчивая моделями, в которых каждый водитель характеризуется своим вариационным принципом (И. А. Лубашевский и др.). Отметим здесь главу 3, в которой приводится «эмпирический базис», т. е. даются свойства реальных пространственно-временных структур, возникающих в плотном транспортном потоке вблизи «узкого места»,[1)] для анализа различных подходов к описанию транспортного потока. Важным атрибутом многих современных зарубежных работ, в которых предлагаются математические модели транспортного потока, является проверка предложенных моделей на возможность описания ими трех фаз Кернера транспортного потока, наблюдаемых в многочисленных эмпирических (измеренных) данных.

[1)] Заметим, что, как правило, исследователи ограничиваются изучением транспортного потока на отдельном прямолинейном участке транспортной сети с простейшими начально-краевыми условиями, в то время как причиной заторов (согласно К. Даганзо) часто являются «узкие места» (перекрестки, въезды).

Математическая теория управления транспортными потоками, как уже упоминалось выше, сейчас активно развивается в работах калифорнийской школы, возглавляемой П. Варайя и А. Б. Куржанским. Исходя из модели клеточных автоматов К. Даганзо (1994), которую можно представить как «схема Годунова + модель Лайтхилла—Уизема + треугольная фундаментальная диаграмма», предлагается способ оптимального управления светофорами и въездами на магистралях в Калифорнии. Здесь стоит обратить внимание на соизмеримость грубости выбранной модели, качества имеющихся данных (см., например, `http://pems.dot.ca.gov/`) и простоты работы с этой моделью. Поясним основную идею того, как следует управлять. Из фундаментальной диаграммы следует, что одному и тому же значению потока автомобилей соответствуют разные (как правило, две) плотности и, как следствие, разные скорости. Очевидно, что более выгодным режимом является режим с большей скоростью. Задача управления (скажем, светофорами или въездами на основные магистрали) заключается в том, чтобы большую часть времени среднестатистический водитель проводил именно в таких режимах.

Подробнее об изложенном выше можно прочитать в главах 2 и 3.

Из-за сильной неустойчивости (при достаточно больших плотностях) решений уравнений, описывающих транспортные потоки, задача получения достоверного прогноза загрузки транспортной сети по имеющимся данным на час вперед сродни задаче получения достоверного прогноза погоды на неделю вперед. При этом вычислительные мощности современных высокопроизводительных кластеров в терафлопс и выше позволяют просчитывать реальную ситуацию по Москве (в которой, напомним, порядка четырех миллионов автомобилей) со значительным опережением реального времени. Другими словами, основной проблемой при моделировании транспортных потоков является не ограничение по вычислительным мощностям и ресурсам памяти, а большая чувствительность описываемой реальной транспортной системы к входным данным (характеристики источников и стоков автомобилей) и невозможность собрать достаточно полную информацию о входных данных.

Одним из возможных выходов из этого является рассмотрение в некотором смысле усредненных показателей транспортной системы — например, в смысле теории систем массового обслуживания. Обгоны на многополосной дороге, очереди перед светофорами и многое другое можно описывать таким образом — о чем говорится в приложении А. А. Замятина и В. А. Малышева. В основе моделей этого приложения лежат эргодические марковские процессы. При таком подходе исследователь следит лишь за трендом и «не обращает внимания» на высокочастотные случайные колебания (флуктуации), возможно большой амплитуды, вокруг этого тренда. В связи с упоминанием словосочетания *усредненные пока-*

затели отметим здесь также приложение А. М. Райгородского, в котором исследуются различные свойства случайных графов (транспортных графов, web-графов), например, такое важное свойство, как надежность графа транспортной сети к случайным отказам ребер (отказ ребра означает, что на ребре образовалась пробка). В этих приложениях наблюдается плотная концентрация исследуемых макровеличин (макропоказателей) в маленьких окрестностях своих математических ожиданий. Однако если в приложении Замятина и Малышева мера, которая концентрируется, порождается (как финальная = стационарная) эргодической марковской динамикой, то в приложении А. М. Райгородского она задается непосредственно, скажем, из соображений независимости и однородности (модель случайного графа Эрдёша—Реньи).

В зависимости от того, какая конкретная задача поставлена, следует отдавать предпочтение тому или иному подходу или даже какому-то их сочетанию.

Вернемся теперь к тому, как все-таки ставить начально-краевые условия для целостного описания транспортного потока на полном графе транспортной сети. Будем считать, что есть лишь информация о том, сколько людей живет в том или ином районе и сколько рабочих мест есть в том или ином районе. В главе 1 и приложении Е. В. Гасниковой приведены различные способы обоснования известной на практике энтропийной (гравитационной) модели А. Дж. Вильсона (1967) расчета матрицы корреспонденций (сколько людей, проживающих в районе i, работают в районе j). По сути, матрица корреспонденций определяется как наиболее вероятное макросостояние, в окрестности которого и будет плотная концентрация, стационарной меры «разумной» эргодической марковской динамики, порождающей изучаемую макросистему. Точнее говоря, эргодическая марковская динамика приводит на больших временах к стационарной (инвариантной) пуассоновской (сложной) мере на пространстве макросостояний. Эта мера экспоненциально быстро концентрируется с ростом числа агентов в окрестности наиболее вероятного макросостояния, которое и принимается за положение равновесия макросистемы. Задача поиска наиболее вероятного макросостояния асимптотически по числу агентов эквивалентна задаче максимизации энтропийного функционала на множестве, заданном ограничениями — законами сохранения. Приятной особенностью такого класса задач является явная и легко выписываемая зависимость решения прямой задачи от двойственных переменных. Поскольку число ограничений, как правило, на много порядков меньше числа прямых переменных, то эффективные численные методы базируются на решении двойственной задачи: минимизации выпуклой функции. Отметим, что описанная здесь задача энтропийно-линейного программирования имеет много общего с обычной транспортной задачей.

Далее, исходя из известных потребностей (корреспонденций), водители начинают «нащупывать» некую равновесную конфигурацию потоков (конкурентное равновесие, равновесие Нэша—Вардропа, 1952). Понятно, что корреспонденция не определяет, вообще говоря, однозначно путь следования. Скажем, из МФТИ можно добираться до МГУ разными способами. И если ситуация равновесная, то никому не должно быть выгодно менять свой путь следования — стратегию (ситуация равновесия по Нэшу). Это означает, что времена движения по всем путям, которые хоть кто-нибудь выбрал, соответствующим данной корреспонденции, должны быть одинаковыми. О том, как происходит «нащупывание» равновесия, какие есть обобщения у этой модели и какие есть численные способы решения возникающих по ходу задач оптимизации, написано в главе 1 и в задачах к главе 1 и приложению Е. В. Гасниковой. К счастью, популярный сейчас формат данных о транспортной системе в виде GPS-треков автомобилей позволяет контролировать и тем самым постоянно «подкручивать» выводы рассмотренных моделей и некоторых их важных обобщений.

Имея информацию о том, как распределяются потоки, уже можно получать оценки матриц перемешивания в узлах графа транспортной сети, тем самым замыкать целостную модель. К сожалению, такой способ крайне чувствителен к точности (полноте) входных (обучающих) данных.

В приложении А. В. Колесникова рассматривается задача Монжа—Канторовича о перемещении масс [1)], эквивалентная, при весьма общих условиях, задаче Монжа. Оптимальный план перевозок (точнее, потенциал этого отображения) удовлетворяет уравнению в частных производных Монжа—Ампера и порождает метрику Канторовича(—Рубинштейна). С помощью этой метрики устанавливаются довольно тонкие функциональные неравенства о *концентрации меры* (М. Громов, М. Талагран, К. Мартон, М. Леду и др.). Сам термин «концентрация меры», по-видимому, был впервые предложен В. Д. Мильманом, внесшим значительный вклад в эту область. Геометрически этот принцип можно довольно просто пояснить задачей Пуанкаре—Леви (см. с. 374–375): площадь многомерной сферы (с выделенным северным и южным полюсом) практически полностью сосредоточена в маленькой полоске вокруг экватора. Этот принцип нашел широкое применение, например, в теории вероятностей (нелинейные законы больших чисел — концентрация значений липшицевых функций в окрестности медианы), асимптотической комбинаторике (в частности, при исследовании плотной концентрации различных функций, типа числа независимости, на случайных графах; см. приложение А. М. Райгородского). Явление концентрации меры играет немаловажную роль в понимании ряда

[1)] Сильно связанная с транспортной задачей, о которой написано в главе 1, приложении Е. В. Гасниковой и которая фигурирует также в задачах, приведенных в конце пособия.

материалов пособия: концепции равновесия макросистемы (модель расчета матрицы корреспонденций), исследованиях надежности графа транспортной сети (по модели Эрдёша—Реньи), оценках скорости сходимости к равновесию и др.