1935 год (I олимпиада)

Первый тур

1-й вариант

1. Определить отношение двух чисел, если отношение их среднего арифметического к среднему геометрическому равно $25:24$.

2. Построить треугольник по данным двум сторонам a и b и биссектрисе m угла между ними.

3. Пирамида, все боковые рёбра которой наклонены к плоскости основания под углом φ, имеет в основании равнобедренный треугольник с углом α, заключённым между равными сторонами. Определить двугранный угол при ребре, соединяющем вершину пирамиды с вершиной угла α.

2-й вариант

1. Железнодорожный поезд проходит мимо наблюдателя в течение t_1 секунд, при той же скорости он проходит через мост длиной в a метров в течение t_2 секунд. Найти длину и скорость поезда.

2. Построить квадрат, три вершины которого лежали бы на трёх данных параллельных прямых.

3. Найти объём правильной четырёхугольной пирамиды, стороны основания которой равны a, а плоские углы при вершине равны углам наклона боковых рёбер к плоскости основания.

3-й вариант

1. Составить две прогрессии: арифметическую и геометрическую, каждую из четырёх членов; при этом если сложить одноимённые члены обеих прогрессий, то должны получиться следующие числа: 27, 27, 39, 87.

2. Доказать, что если стороны треугольника образуют арифметическую прогрессию, то радиус вписанного круга равен $\frac{1}{3}$ одной из высот.

3. Высота усечённого конуса равна радиусу его большего основания; периметр правильного шестиугольника, описанного около меньшего основания, равен периметру равностороннего треугольника, вписанного в большее основание. Определить угол наклона образующей конуса к плоскости основания.

4-й вариант

1. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2+y^2-2z^2=2a^2, \\ x+y+2z=4(a^2+1), \\ z^2-xy=a^2. \end{cases}$$

2. В треугольнике ABC из произвольной точки D на стороне AB проведены две прямые, параллельные сторонам AC и BC, пересекающие BC и AC соответственно в точках F и G. Доказать, что сумма длин окружностей, описанных около треугольников ADG и BDF, равна длине окружности, описанной около треугольника ABC.

3. Развёртка боковой поверхности конуса представляет собой сектор с углом в 120°; в конус вписана треугольная пирамида, углы основания которой составляют арифметическую прогрессию с разностью 15°. Определить угол наклона к плоскости основания наименьшей из боковых граней.

Второй тур

Серия А

1. Дана окружность и на ней три точки M, N, P, в которых пересекаются с окружностью (при продолжении) высота, биссектриса и медиана, выходящие из одной вершины вписанного треугольника. Построить этот треугольник.

2. На поверхности куба найти точки, из которых диагональ видна под наименьшим углом. Доказать, что из остальных точек поверхности куба диагональ видна под бо́льшим углом, чем из найденных.

3. В двух различных плоскостях лежат два треугольника: ABC и $A_1B_1C_1$. Прямая AB пересекается с прямой A_1B_1, прямая BC — с прямой B_1C_1, прямая CA — с прямой C_1A_1. Доказать, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 или все три пересекаются в одной точке, или параллельны друг другу.

Серия B

1. Сколько действительных решений имеет система двух уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} x+y=2, \\ xy-z^2=1? \end{cases}$$

2. Решить [1] систему уравнений:

$$\begin{cases} x^3-y^3=26, \\ x^2y-xy^2=6. \end{cases}$$

3. Найти сумму

$$1^3+3^3+5^3+\ldots+(2n-1)^3.$$

Серия C

1. Выбраны 6 различных цветов; требуется раскрасить 6 граней куба, каждую в особый цвет из числа избранных. Сколькими геометрически различными способами можно это сделать? Геометрически различными называются две такие расцветки, которые нельзя совместить одну с другой при помощи вращений куба вокруг его центра.

Решить ту же задачу для случая раскраски граней правильного двенадцатигранника в 12 различных цветов.

---

[1] Найти все решения, включая комплексные. — *Прим. ред.*

2. Сколькими различными способами можно разложить целое положительное число n на сумму трёх положительных целых слагаемых? При этом два разложения, отличающиеся только порядком слагаемых, считаются за различные.

3. Будем обозначать через $M(a, b)$ — общее наименьшее кратное двух чисел a и b, $D(a, b)$ — общий наибольший делитель двух чисел a и b.

Доказать формулу $M(a, b) \cdot D(a, b) = ab$.

Для трёх чисел доказать формулу

$$\frac{M(a, b, c) \cdot D(a, b) \cdot D(b, c) \cdot D(c, a)}{D(a, b, c)} = abc.$$

1936 год (II олимпиада)

Второй тур

1. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = a, \\ x^5 + y^5 = b^5. \end{cases}$$

2. На плоскости дан угол, образованный двумя лучами a и b, и некоторая точка M. Провести через точку M прямую c так, чтобы треугольник, образованный прямыми a, b и c, имел периметр данной величины.

3. Доказать, что если длины сторон прямоугольного треугольника выражаются целыми числами, то произведение чисел, выражающих длины катетов, делится на 12.

4. Сколькими различными способами можно представить 1 000 000 в виде произведения трёх натуральных[1] чисел? Произведения, отличающиеся лишь порядком сомножителей, считаются тождественными.

5. В пространстве расположены три плоскости и шар. Сколькими различными способами можно поместить в

---

[1] В оригинальной формулировке вместо *натуральных* говорилось *целых*, но имелись в виду именно натуральные числа — *Прим. ред*.