1935 год (I олимпиада)

Первый тур

1-й вариант

1. Пусть x и y — искомые числа. По условию $\frac{x+y}{2}:\sqrt{xy}=25:24$, т. е. $\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{25}{12}$. Положим $q=\sqrt{x/y}$. Тогда $q+\frac{1}{q}=\frac{25}{12}$, т. е. $q^2-\frac{25}{12}q+1=0$. Решая это квадратное уравнение, находим $q_1=4/3$ и $q_2=3/4$. Таким образом, $x:y=16:9$ или $9:16$.

2. Пусть ABC — искомый треугольник, CD — его биссектриса. Возьмём на прямой AC точку E так, что $BE \parallel CD$ (рис. 10). Тогда углы при стороне BE треугольника BCE равны, поэтому $EC=CB=a$. Кроме того, $EB:CD=EA:CA$, поэтому

$$EB=\frac{m(a+b)}{b}.$$

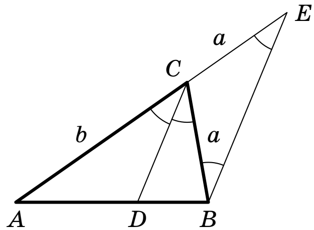

Рис. 10

В треугольнике BCE мы знаем длины всех сторон, поэтому можем его построить. Теперь для построения треугольника ABC достаточно отложить отрезок b на продолжении стороны EC за точку C.

Задача имеет решение, если $\frac{m(a+b)}{b}<2a$.

3. Пусть ABC — основание данной пирамиды, причём A — вершина равнобедренного треугольника ABC, т. е. $\angle BAC=\alpha$; S — вершина пирамиды. Боковые рёбра наклонены под равными углами, поэтому они равны. Из равенства треугольников ASB и ASC следует, что основания перпендикуляров, опущенных из точек B и C на прямую

AS, совпадают. Пусть D — основание этих двух перпендикуляров, E — середина отрезка BC. Тогда угол $\vartheta = \angle CDB$ искомый. Ясно, что $DE = AE \sin\varphi$ ($\angle ADE = 90^\circ$, поскольку прямая AD перпендикулярна плоскости BDC) и $EC = AE \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Поэтому $\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} = \frac{EC}{DE} = \frac{\operatorname{tg}(\alpha/2)}{\sin\varphi}$.

2-й вариант

1. Пусть длина поезда равна l м. Чтобы проехать через мост, передний вагон должен въехать на мост, проехать по нему a м, а потом проехать ещё l м для того, чтобы последний вагон покинул мост. В результате получаем систему уравнений $l = t_1 v$, $l + a = t_2 v$. Решая её, находим $l = \frac{t_1 a}{t_2 - t_1}$ м и $v = \frac{a}{t_2 - t_1}$ м/с.

2. Пусть a, b, c — данные прямые, причём прямая b лежит между a и c. Предположим, что вершины A, B, C квадрата $ABCD$ лежат на прямых a, b, c соответственно.

Первый способ. Возьмём на прямой b произвольную точку B и опустим из неё перпендикуляр BA_1 на прямую a и перпендикуляр BC_1 на прямую c. Прямоугольные равные углы (рис. 11), поэтому они равны. Из этого вытекает следующее построение. На прямой a строим отрезок A_1A, равный отрезку BC_1. Мы построили вершину A. Вершина C строится аналогично (так, чтобы точки A и C лежали по одну сторону от прямой A_1C_1).

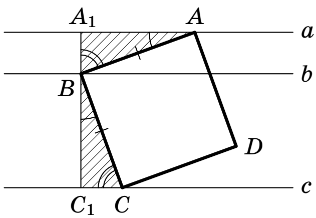

Рис. 11

Второй способ. Из того, что $\angle ABC = 90^\circ$ и $AB = BC$, вытекает следующее построение. Возьмём на прямой b произвольную точку B и повернём прямую a относительно точки B на 90° (в одну или в другую сторону). Точка C — это точка пересечения прямой c и образа прямой a при указанном повороте.

3. Пусть длина бокового ребра равна b, а высота пирамиды равна h. Искомый объём V равен $a^2h/3$. Пусть плоские углы при вершине и углы наклона боковых рёбер к плоскости основания равны α. Тогда $b\sin\alpha = h$, $b\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ и $b\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2}$. Поэтому из 1-го и 3-го уравнений получаем

$$h = b\sin\alpha = \frac{a\sin\alpha}{2\sin(\alpha/2)} = a\cos\frac{\alpha}{2},$$

а значит, $V = \frac{1}{3}a^3\cos\frac{\alpha}{2}$. Кроме того, из 2-го и 3-го уравнений получаем $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha$. Пусть $\cos\frac{\alpha}{2} = x$. Тогда

$$\frac{1}{\sqrt{2}} < x < 1, \tag{1}$$

так как $\alpha < 90^\circ$, и

$$\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(2x^2-1). \tag{2}$$

После возведения обеих частей в квадрат новых корней не появится, так как $2x^2-1>0$ согласно неравенству (1). Поэтому уравнение (2) можно преобразовать к виду $4x^4 - 2x^2 - 1 = 0$. Это уравнение является квадратным уравнением относительно x^2. Решая его, получаем $x^2 = \frac{1\pm\sqrt{5}}{4}$. Ни число x^2, ни число x не могут быть отрицательными, поэтому $x = \frac{1}{2}\sqrt{1+\sqrt{5}}$.

3-й вариант

1. Пусть a, $a+d$, $a+2d$, $a+3d$ — искомая арифметическая прогрессия; b, bq, bq^2, bq^3 — искомая геометрическая прогрессия. По условию

$$\begin{aligned} a+b &= 27,\\ a+d+bq &= 27,\\ a+2d+bq^2 &= 39,\\ a+3d+bq^3 &= 87. \end{aligned}$$

Вычтем из второго уравнения первое, из третьего второе, из четвёртого третье:

$$d+b(q-1)=0,$$
$$d+bq(q-1)=12,$$
$$d+bq^2(q-1)=48.$$

Из первого уравнения получаем $b(q-1)=-d$; подставим это выражение для $b(q-1)$ во второе и третье уравнения:

$$d-dq=12,$$
$$d-dq^2=48.$$

Поделив последнее уравнение на предпоследнее, получим $1+q=4$, т. е. $q=3$. Следовательно, $d=\frac{12}{1-q}=-6$, $b=\frac{d}{1-q}=$ $=3$ и $a=27-b=24$. Таким образом, искомые прогрессии — это 24, 18, 12, 6; 3, 9, 27, 81.

2. Пусть $a-d$, a, $a+d$ — стороны треугольника, h — высота, опущенная на сторону a. Площадь треугольника, с одной стороны, равна $\frac{ah}{2}$, а с другой стороны, она равна произведению половины периметра на радиус вписанного круга: $\frac{(a-d)+a+(a+d)}{2}r$. Приравнивая эти выражения, получаем $\frac{ah}{2}=\frac{3ar}{2}$, т. е. $r=\frac{1}{3}h$.

3. Пусть R — радиус окружности большего основания, r — радиус окружности меньшего основания. Периметр правильного шестиугольника, описанного около меньшего основания, равен $\frac{12r}{\sqrt{3}}$. Периметр правильного треугольника, вписанного в большее основание, равен $3R\sqrt{3}$. По условию $\frac{12r}{\sqrt{3}}=3R\sqrt{3}$, т. е. $r=\frac{3}{4}R$. Если φ — искомый угол наклона, то $\operatorname{tg}\varphi=$ $=\frac{R}{R-r}=4$ (рис. 12).

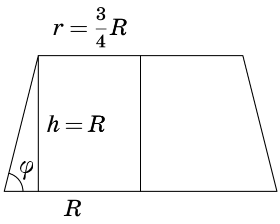

Рис. 12

4-й вариант

1. Запишем эти уравнения следующим образом:

$$\begin{cases} x^2+y^2=2z^2+2a^2, \\ x+y=4(a^2+1)-2z, \\ -xy=a^2-z^2. \end{cases}$$

Второе уравнение возведём в квадрат, прибавим к нему третье уравнение, умноженное на 2, и вычтем первое уравнение. В результате получим

$$0=16(a^2+1)^2-16(a^2+1)z,$$

т. е. $z=a^2+1$ (здесь предполагается, что число a вещественное, поэтому $a^2+1\neq 0$ и на a^2+1 можно поделить). Теперь второе и третье уравнения записываются так:

$$\begin{cases} x+y=2(a^2+1), \\ xy=a^4+a^2+1. \end{cases}$$

Решение этой системы сводится к решению квадратного уравнения; решая его, находим

$$x=a^2\pm a+1, \qquad y=a^2\mp a+1.$$

2. Радиусы R_1, R_2 и R описанных окружностей подобных треугольников ADG, DBF и ABC пропорциональны соответственным сторонам:

$$\frac{R_1}{AD}=\frac{R_2}{DB}=\frac{R}{AB},$$

поэтому $\dfrac{R_1+R_2}{AD+DB}=\dfrac{R}{AB}$, а значит, $R_1+R_2=R$. Умножая это равенство на 2π, получаем требуемое.

3. Пусть l — длина образующей конуса. Длина окружности основания равна длине дуги развёртки, поэтому радиус окружности основания равен $l/3$. Пусть углы треугольника, лежащего в основании пирамиды, равны $\alpha-15^\circ$, α и $\alpha+15^\circ$. Учитывая, что сумма углов любого треугольника равна 180°, получаем, что $\alpha = 60^\circ$. Поэтому основание пирамиды — треугольник ABC с углами 45°, 60°, 75°. Пусть BC — меньшая сторона, O — центр описанной окружности треугольника ABC. Тогда $\angle BOC = 2\cdot 45^\circ = 90^\circ$, поэтому BOC — равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами $l/3$. Значит, $BC = l\sqrt{2}/3$. Пусть D — середина отрезка BC, S — вершина конуса. Тогда $OD = DB = \dfrac{l}{3\sqrt{2}}$ и $SD = \sqrt{SB^2 - DB^2} = \sqrt{l^2 - \dfrac{l^2}{18}} = \dfrac{l\sqrt{17}}{3\sqrt{2}}$. Если φ — искомый угол, то $\cos\varphi = \dfrac{OD}{SD} = \dfrac{1}{\sqrt{17}}$.

Второй тур

Серия А

1. Пусть ABC — исходный треугольник, причём A — вершина треугольника ABC, из которой проведены медиана, биссектриса и высота. По точкам M, N и P можно построить описанную окружность. Пусть O — её центр. Прямая ON параллельна прямой AM, поскольку обе они перпендикулярны стороне BC (рис. 13). Из этого вытекает следующее построение. Через точку M проводим прямую, параллельную прямой ON. Вершина A — это точка пересечения построенной прямой с описанной окружностью. Чтобы построить остальные вершины, найдём точку пересечения прямых AP и ON; из этой точки восставим перпендикуляр к прямой ON. Он пересекает окружность в искомых точках.

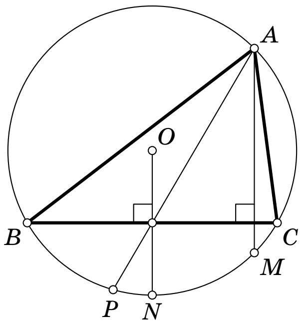

Рис. 13

2. Множество точек, из которых диагональ AC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ видна под углом 90°, представляет собой описанную вокруг куба сферу (концы диагонали исключены). Действительно, докажем, например, что из вершины B диагональ AC_1 видна под углом 90°. Прямая AB перпендикулярна грани BCC_1B_1, поэтому $AB \perp BC_1$ (рис. 14), т. е. $\angle ABC_1 = 90^\circ$. Для остальных вершин доказательство аналогично.

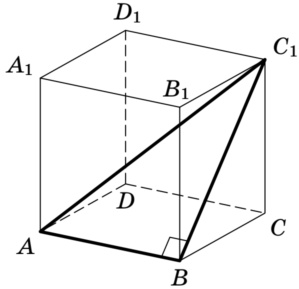

Рис. 14

Пересечение этого множества с поверхностью куба состоит из шести точек — вершин куба, отличных от концов данной диагонали. Все остальные точки поверхности куба лежат строго внутри описанной сферы, поэтому из них диагональ видна под тупым углом.

3. По условию каждая пара прямых AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, AC и A_1C_1 лежит в одной плоскости, поэтому мы можем рассмотреть плоскости ABA_1B_1, BCB_1C_1 и ACA_1C_1. Пересечением первых двух плоскостей служит прямая BB_1 (ни одна из пар рассматриваемых плоскостей не может совпадать, иначе треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ лежали бы в одной плоскости). Если третья плоскость пересекает прямую BB_1 в некоторой точке, то эта точка является как точкой пересечения трёх указанных плоскостей, так и точкой пересечения прямых AA_1, BB_1 и CC_1. Действительно, прямые AA_1 и CC_1 являются пересечениями пар плоскостей, поэтому точка пересечения трёх плоскостей им принадлежит. Если же третья плоскость параллельна прямой BB_1, то прямые AA_1, BB_1 и CC_1 параллельны друг другу. Действительно, в этом случае пересечения пар плоскостей являются тремя параллельными прямыми.

К о м м е н т а р и й. Из этого утверждения легко выводится теорема Дезарга: если треугольники ABC и $A'B'C'$ расположены на плоскости так, что точки пересечения прямых AB и $A'B'$, BC и $B'C'$, CA и $C'A'$ лежат на одной прямой, то прямые AA', BB' и CC' пересекаются в одной точке или параллельны друг другу.

Серия B

1. *Первый способ.* Из второго уравнения следует, что $xy \geqslant 1$. Числа x и y не могут быть оба отрицательны, поскольку их сумма равна 2. Значит, числа x и y положительны, и согласно неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим двух чисел $x + y \geqslant \geqslant 2\sqrt{xy} \geqslant 2$, причём равенство $x + y = 2$ возможно лишь в том случае, когда $x = y = 1$. В таком случае $z = 0$.

Второй способ. Подставим выражение $y = 2 - x$ во второе уравнение. В результате получим $z^2 = x(2 - x) - 1 = = -(x - 1)^2$. Следовательно, $z = 0$, $x = 1$ и $y = 2 - x = 1$.

2. Пусть $y = kx$. Сразу отметим, что $k \neq 1$. Из уравнений

$$x^3 - k^3x^3 = 26,$$
$$kx^3 - k^2x^3 = 6$$

получаем $x^3 = \dfrac{26}{1 - k^3}$ и $x^3 = \dfrac{6}{k - k^2}$. Следовательно,

$$\frac{26}{1 - k^3} = \frac{6}{k - k^2}.$$

Поскольку $k \neq 1$, обе части этого уравнения можно умножить на $1 - k$. В результате получим эквивалентное уравнение

$$\frac{26}{1 + k + k^2} = \frac{6}{k},$$

т. е. $6k^2 - 20k + 6 = 0$. Решая это квадратное уравнение, получаем $k = 3$ или $\dfrac{1}{3}$. Поэтому равенство $x^3 = \dfrac{26}{1 - k^3}$ показывает, что $x^3 = -1$ или $x^3 = 27$. В итоге, используя соотношение $y = kx$, получаем решения, перечисленные в ответе.

3. Индукцией по m легко доказать, что $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots \ldots + m^3 = \left(\dfrac{m(m+1)}{2}\right)^2$. Действительно, база индукции очевидна: при $m = 1$ как левая, так и правая часть равны 1. Поэтому нужно лишь доказать шаг индукции, т. е. проверить равенство

$$\frac{m^2(m+1)^2}{4}+(m+1)^3=\frac{(m+1)^2(m+2)^2}{4}.$$

После сокращения на $(m+1)^2$ и умножения на 4 получаем очевидное равенство $m^2+4(m+1)=(m+2)^2$.

Таким образом,

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+(2n-1)^3+(2n)^3=\left(\frac{2n(2n+1)}{2}\right)^2,$$

т. е.

$$1^3+3^3+5^3+\ldots+(2n-1)^3+2^3(1^3+2^3+\ldots+n^3)=\\=\left(\frac{2n(2n+1)}{2}\right)^2.$$

Преобразуем последнее равенство, воспользовавшись тем, что $1^3+2^3+\ldots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$. В результате получим

$$1^3+3^3+5^3+\ldots+(2n-1)^3=\\=\left(\frac{2n(2n+1)}{2}\right)^2-2^3\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2=n^2(2n^2-1).$$

Серия C

1. Сначала решим задачу для куба.

Первый способ. Куб можно повернуть так, чтобы грань, окрашенная первым цветом, заняла заданное положение. Для окраски противоположной ей грани есть 5 различных вариантов; разные раскраски противоположной грани дают геометрически различные раскраски куба. Среди оставшихся четырёх граней можно выбрать грань, окрашенную данным цветом (одним из четырёх оставшихся цветов), и перевести её в данное положение (не меняя при этом положение первых двух граней). Разные раскраски трёх оставшихся граней дают геометрически различные раскраски куба. Одну из этих граней можно окрасить тремя способами, одну из оставшихся — двумя. Всего получаем $5\cdot3\cdot2=30$ геометрически различных раскрасок.

Второй способ. Сначала найдём число разных рас-красок куба без учёта его самосовмещений, т. е. мы считаем, что грани куба занумерованы, причём если цвета хотя бы одной грани разные, то такие раскраски считаются разными. Первую грань можно покрасить в 6 цветов, вторую в 5, третью в 4 и т. д. Всего получаем $6! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 6 = 720$ разных раскрасок. Из каждой такой раскраски можно получить столько разных раскрасок, сколько есть разных самосовмещений куба; при этом все эти раскраски будут геометрически одинаковыми. Таким образом, число геометрически различных раскрасок куба равно $720/N$, где N — число самосовмещений куба. Любую из 6 граней куба самосовмещением можно перевести в любую другую. После этого можно сделать любой из 4 поворотов (включая тождественный), сохраняющих данную грань. Всего получается $6 \cdot 4 = 24$ самосовмещения. Поэтому количество геометрически различных раскрасок куба равно $720/24 = 30$.

Решим теперь задачу для 12-гранника (додекаэдра); при этом мы будем рассуждать так же, как во втором решении задачи для куба. Количество всех возможных раскрасок додекаэдра равно $12! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 12$. Чтобы найти число геометрически различных раскрасок, нужно поделить $12!$ на число самосовмещений додекаэдра. Любую из 12 граней можно перевести в любую другую. Кроме того, есть 5 поворотов (включая тождественный), сохраняющих данную грань. Всего получается 60 самосовмещений. Поэтому количество геометрически различных раскрасок додекаэдра равно $12!/60 = 7\,983\,360$.

2. *Первый способ*. Пусть $n = x + y + z$. Число x может быть равно $1, 2, 3, \ldots, n-2$. При фиксированном x число y может принимать одно из $n - x - 1$ значений. Всего получаем $(n-2) + (n-3) + \ldots + 1 = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ вариантов.

Второй способ. Запишем n как сумму единиц: $n = 1 + \ldots + 1$. Представить n в виде суммы целых положительных чисел $n = x + y + z$ — это то же самое, что выбрать среди $n-1$ знаков плюс какие-то два. Действительно, мы можем считать, что перед первым по порядку выбранным знаком плюс стоит x единиц, а после второго знака плюс стоит z единиц. Всего получаем $\binom{n-1}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ вариантов.

3. Докажем сначала формулу для двух чисел. Пусть $a = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ и $b = p_1^{\beta_1} \dots p_k^{\beta_k}$. Тогда

$$D(a, b) = p_1^{\min\{\alpha_1, \beta_1\}} \dots p_k^{\min\{\alpha_k, \beta_k\}},$$
$$M(a, b) = p_1^{\max\{\alpha_1, \beta_1\}} \dots p_k^{\max\{\alpha_k, \beta_k\}},$$

где $\min\{\alpha, \beta\}$ обозначает наименьшее из двух чисел α и β, а $\max\{\alpha, \beta\}$ — наибольшее. Приведём доказательство для каждого простого множителя отдельно. Пусть $a = p^\alpha$ и $b = p^\beta$, причём $\alpha \leqslant \beta$. Тогда $D(a, b) = p^\alpha$ и $M(a, b) = p^\beta$. Поэтому $M(a, b) \cdot D(a, b) = p^\alpha p^\beta = ab$.

Аналогично докажем формулу для трёх чисел. Достаточно рассмотреть случай, когда $a = p^\alpha$, $b = p^\beta$, $c = p^\gamma$, причём $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$. В этом случае

$$\frac{M(a, b, c) D(a, b) D(b, c) D(c, a)}{D(a, b, c)} = \frac{p^\gamma p^\alpha p^\beta p^\alpha}{p^\alpha} = abc.$$

1936 год (II олимпиада)

Второй тур

1. Пусть $xy = t$. Несложно проверить, что

$$x^5 + y^5 = (x+y)^5 - 5(x+y)^3 xy + 5(x+y) x^2 y^2 = a^5 - 5a^3 t + 5at^2.$$

При $a \neq 0$ для t получаем квадратное уравнение $t^2 - a^2 t + \frac{a^5 - b^5}{5a} = 0$. Решая его, находим $t = \frac{1}{2}\left(a^2 \pm \sqrt{\frac{a^5 + 4b^5}{5a}}\right)$.