Предисловие

Вторая часть книги содержит главы с XXI по XXXIX.

Начинается эта часть с изложения основных фактов, связанных с понятием «винеровская мера». Также кратко излагаются конструкции абстрактных винеровских мер в банаховых пространствах. Броуновское движение и винеровская мера играют исключительную роль в классических и функциональных предельных теоремах. Соответствующие вопросы тесно связаны с теорией слабой сходимости вероятностных мер на метрических пространствах и, в первую очередь, с результатами Ю. В. Прохорова, А. В. Скорохода, М. Д. Донскера. Все это подробно излагается в гл. XXIII—XXV.

Глава XXVIII содержит материал, связанный с часто используемыми операторами (Орнштейна—Уленбека, Эрмита, Мелера) и гауссовскими неравенствами (Эфрона—Стейна, Пуанкаре, Соболева).

Глава XXIX посвящена главным образом изложению сведений об L^2-функционалах на винеровском пространстве и об интегралах Винера—Ито.

С 70-х годов прошлого столетия широкое развитие получили исчисление Маллявэна и метод Стейна. Тогда как исчисление Ито — это *интегральное исчисление* по броуновскому движению, подход Маллявэна (гл. XXX) является *дифференциальным* вариационным методом, существенно основанным на функциональной формуле интегрирования по частям.

Метод Стейна (гл. XXVI) использует новую технику оценивания близости вероятностных мер, что можно рассматривать как важное дополнение к теории слабой сходимости мер на метрических пространствах.

Глава XXXIII содержит материал, относящийся к применению исчисления Маллявэна и метода Стейна в гауссовской аппроксимации распределений функционалов (Винера—Ито) на винеровском пространстве. В гл. XXXI и XXXII дается большой материал о применении исчисления Маллявэна к теории дифференциальных уравнений и финансовой математике.

Существенная часть «броуновской теории» связана со стохастическими дифференциальными уравнениями, порожденными броуновским движением. В гл. XXXIV рассматриваются вопросы о слабых и сильных решениях таких уравнений, а в гл. XXXV рассматриваются *обратные* стохастические дифференциальные уравнения, для которых задается терминальное, концевое значение. Такие уравнения интересны во многих отношениях, что иллюстрируется в гл. XXXVI и XXXVII.

В гл. XXXVI продемонстрировано, как обратные стохастические дифференциальные уравнения, управляемые броуновским движением, дают возможность определить понятие g-ожидания, которое по своим свойствам весьма близко к понятию обычного математического ожидания, за исключением свойства аддитивности, являясь, таким образом, *нелинейным* функционалом на пространстве случайных величин.

В § 2 этой главы приводится еще один пример нелинейного функционала, являющегося интегралом Шоке по емкости. Интересно, что в «Основных понятиях теории вероятностей» [433] А. Н. Колмогоров (в связи с обобщением закона больших чисел) описал случай обобщенного математического ожидания, для которого выполняются все свойства обычного математического ожидания, за исключением свойства аддитивности.

В той же главе XXXVI приводятся результаты о структуре сублинейных функционалов, определенных на линейном пространстве (§ 7). Рассматриваются вопросы аксиоматического определения когерентных и выпуклых мер риска и многие другие проблемы, связанные с рисками в страховании и финансовой математике.

Вопросам оптимального управления в стохастических дифференциальных уравнениях посвящается глава XXXVII. Ее структура во многом определяется тем, что изложение в этой главе основано на *вариационных методах*. Именно поэтому мы излагаем историю задач, приведших к становлению вариационного исчисления, где решающая роль принадлежит уравнению Эйлера—Лагранжа. Описав гамильтонову формулировку этих уравнений, принцип максимума и др., мы переходим к стохастическому принципу максимума, дающему *необходимые* условия оптимальности стохастического управления, и завершаем главу *верификационной* теоремой, являющейся примером *достаточных* условий для оптимальности стохастического управления.

В гл. XXXVIII мы рассматриваем вопросы «размерности» различных множеств, связанных с n-мерным броуновским движением. При этом «размерности» понимаются в смысле Минковского и Хаусдорфа.

В заключительной главе XXXIX вкратце рассматриваются три классических подхода к основаниям квантовой механики, предложенные В. Гейзенбергом, Э. Шрёдингером и Р. Фейнманом, и обсуждаются вероятностные интерпретации этих подходов, основанные на диффузионных уравнениях, порождаемых броуновским движением.