

ГЛАВА I

Эволюционные модели

§ 1.1. Дифференциальные уравнения и эволюционные модели

Очень многие процессы в живой и неживой природе, а также в социальных, общественных системах могут быть описаны как изменения каких-то *параметров* изучаемой системы во времени. Таким образом, меняющаяся, «динамичная» система *эволюционирует* во времени, и одна из задач математики, занимающая доминирующую роль начиная с XVII в. (со времени открытия методов *математического анализа*), — это разработка математических моделей эволюции (изменения во времени) — так называемых *эволюционных моделей*.

Эволюция, от лат. *evolutio* — «развертывание», в широком смысле — синоним термина «развитие», в узком смысле, который подразумевается в нашем случае, — это просто любое изменение, а совсем конкретно — непрерывное, постепенное (во времени!) количественное изменение той или иной системы, каких-то ее числовых характеристик, параметров¹. В некоторых случаях удастся узнать (например, экспериментально) явную *функциональную* зависимость рассматриваемых параметров от времени — тогда мы знаем *закон изменения*, т. е. совокупность каких-то *функций* $x_i = x_i(t)$ от переменной времени $t \in \mathbb{R}$. Тогда эта совокупность и представляет собой *математическую модель эволюции*. Гораздо чаще заранее, до математического исследования, указать зависимость параметров от времени не удастся, однако можно как-то (например, экспериментально) узнать *скорость изменения*, и строить математическую модель на основе этой информации. Такие модели мы и будем называть *эволюционными*.

В этом параграфе мы опишем, как именно строятся эволюционные модели, здесь и в следующем параграфе рассмотрим общие и частные примеры эволюционных моделей.

1.1.1. Смысл производной: скорость изменения величины. Напомним (см. учебники алгебры и начал анализа), что *производной*

¹В отличие от *революции* — от лат. *revolutio*, что значит «поворот», «переворот».

числовой функции $f: x \mapsto y = f(x)$ в такой точке x , что f определена в некоторой ее окрестности $\text{Окр}_x = (x - r, x + r)$, называется *предел*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x), \quad (1)$$

при условии, что *этот предел существует*. Предельное равенство (1) означает, что разность

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) = \alpha_x(h) \quad (2)$$

стремится к нулю при h стремящемся к нулю — или, иначе говоря, разность $\alpha_x(h)$ есть *бесконечно малая* в нуле. А это, в свою очередь, означает, что величина $\alpha_x(h)$ становится *сколь угодно близкой к нулю при достаточно малом значении h* : каково бы ни было положительное число ε , найдется такое значение $\delta > 0$, что при любом значении $h \in (-\delta, \delta)$ величина $\alpha_x(h)$ будет отличаться от нуля меньше чем на ε , что можно записать с помощью *кванторов*:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall h \in (-\delta, \delta) |\alpha_x(h)| < \varepsilon$$

(« $\forall$ » — *квантор всеобщности*, «для любого...», «для всех...»; « $\exists$ » — *квантор существования*, «существует...», «найдется...»).

Понятие производной — одно из двух основных понятий *математического анализа* — ввели в конце XVII в. независимо друг от друга англичанин Исаак Ньютон (1643–1727) и немец Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646–1716). Спустя сотню лет французские математики Жан ле Рон Д’Аламбер (1717–1783) и Жозеф Луи Лагранж (1736–1813) дали определение производной, опираясь на интуитивное понятие предела (и сам термин «*производная*», и ее обозначение предложил Лагранж; Ньютон называл ее «*флюксийей*», а Лейбниц связывал с понятием «*дифференциала*», о чем см. в гл. IV). Наконец, еще через век немецкий математик Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс (1815–1897) подвел под понятие производной строгий фундамент, и дал точные определения и производной, и предела, придумав для этого использованный выше «язык ε - δ ».

Нас не столько интересуют строгие определения производной, предела, бесконечно малой, сколько *смысл* понятия производной. Первичный ее смысл наиболее отчетливо выделялся у самого Ньютона: *производная функции $y = f(x)$ в точке x есть скорость изменения переменной величины y в зависимости от переменной x в конкретной точке x* . Что это означает?

Проще всего объяснить указанный *наглядный смысл* производной так. Если *аргумент x* функции f изменяется на величину h (*приращение аргумента $\Delta x = h$* может быть и отрицательным), то значение функции изменяется на величину $\Delta y = f(x+h) - f(x)$, и за *среднюю скорость изменения y* на промежутке от x до $x+h$ естественно принять отношение приращения функции к приращению аргумента. Предел же

средней скорости при $h \rightarrow 0$ — это и есть *скорость изменения функции в точке*, равная производной $y'(x) = f'(x)$.

Это объяснение становится совсем естественным, если, как Ньютон, считать, что переменная x есть *универсальная переменная время*. Однако все-таки в механике (кинематике) скорость есть *вектор*, а введенная скорость изменения функции есть *число, скаляр*. Скалярная величина, в отличие от векторной, не имеет *направления*. Но зато она имеет *знак*, который и показывает, «в какую сторону» — возрастания или убывания — изменяется величина y . Так что исходя из наглядного смысла производной понятно, что если на каком-то промежутке I производная $f'(x)$ положительна, то функция f возрастает на нем, а если $f'(x) < 0$ на I , то функция убывает¹.

Хотя с векторными и скалярными величинами физики и математики имели дело и хорошо управлялись уже давно (можно упомянуть Кеплера с его вторым законом, равно как и Ньютона), сами термины и точно определяемые понятия вектора и скаляра ввел только в 1845 г. ирландский математик и астроном Уильям Роуан Гамильтон (1805–1865), знаменитый изобретением так называемых *кватернионов* — аналога чисел в четырехмерном пространстве. Термин *вектор* — от лат. vector — «несущий»; в математике он означает *направленный отрезок* (или элемент так называемого *векторного пространства*). *Скаляр* — от лат. scalaris — «ступенчатый»; так называются численные величины, со знаком или без такового (длины, площади, объемы; температура и т. д.).

1.1.2. Касательная и геометрический смысл производной.

К кинематическому понятию скорости-вектора и его связи с производной мы вернемся далее, а пока напомним *геометрический смысл производной*. На графике функции $y = f(x)$ рассматриваются две точки, $M_x(x; f(x))$ и $M_{x+h}(x+h; f(x+h))$ и связанный с ними «характеристический треугольник» $M_x M_{x+h} N$ (рис. 1). Из него видно, что отношение Δy к $\Delta x = h$ («бывшая» средняя скорость) есть *угловой коэффициент $k = kx(h)$ секущей $M_h M_{x+h}$* . Интуитивно ясно, что для «хороших» функций эта секущая при $h \rightarrow 0$ стремится к *касательной* к графику. Замечая, что угловой коэффициент $k = kx(h)$ при этом стремится к производной $f'(x)$ (конечно, если она существует), обычно *по определению и полагают, что касательная к графику $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = x_0$ есть проходящая через эту точку прямая, угловой коэффициент которой равен производной $k_0 = f'(x_0)$* . Проводя через точку $M_0(x_0; f(x_0))$ графика *вспомогательные оси координат*, координатами точки $(x; y)$ относительно которых будут $(x - x_0; y - f(x_0))$ (рис. 2), мо-

¹Напомним, что *строгое* доказательство этих признаков *монотонности* требует применения *теоремы Лагранжа* — одной из *основных* теорем дифференциального исчисления, да и всего математического анализа.

жем сразу написать уравнение касательной¹:

$$y - f(x_0) = k_0(x - x_0) \Leftrightarrow y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \quad (3)$$

Просто по определению касательной производная функции в точке x_0 есть угловой коэффициент касательной к графику функции в точке графика с рассматриваемой абсциссой. В этом и состоит (при нашем определении касательной довольно тавтологический!) геометрический смысл производной.

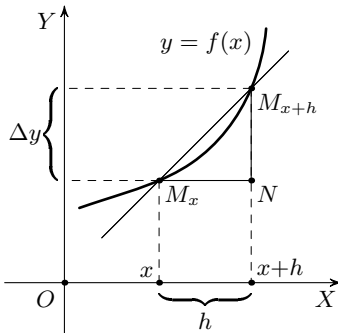


Рис. 1

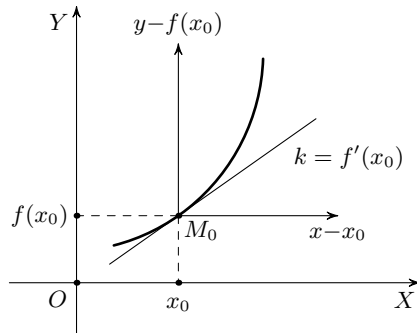


Рис. 2

1.1.3. Понятие линейного приближения. Теперь нечто новое и существенное. Линейная функция (3), задающая касательную к графику $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 , называется *линейным приближением функции $f(x)$ в точке x_0* . Это понятие относится к числу самых основных в анализе числовых функций и различных его обобщениях (типа анализа функций нескольких переменных или *функционального анализа*). Чтобы прояснить смысл линейного приближения, рассмотрим разность самой функции $f(x)$ и ее линейного приближения (3), т. е. величину

$$R = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = (x - x_0) \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right). \quad (4)$$

Не замечаете ли вы в выражении в скобках нечто знакомое, уже встречавшееся?

Конечно, это фигурирующая в формуле (2) *бесконечно малая* (при $x - x_0 \rightarrow 0$, т. е. при $x \rightarrow x_0$) разность между средней скоростью на промежутке от x_0 до x и производной $f'(x_0)$, т. е. скоростью изменения функции f в точке x_0 . Заменяв обозначения: x вместо x_0 , $x+h$ вместо x , так что $x - x_0$ теперь будет просто равно h , мы можем переписать

¹Во вспомогательных координатах $\bar{x}; \bar{y}$ это будет уравнение *прямой пропорциональности* $\bar{y} = k_0 \bar{x}$.

формулу (4) в виде

$$R = f(x+h) - f(x) - f'(x)h = h \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right) = h\alpha_x(h),$$

откуда следует представление

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + h\alpha_x(h). \quad (5)$$

В обозначениях же формулы (4) последняя формула будет выглядеть как

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\alpha(x). \quad (6)$$

Обе последние формулы называются *формулами линейного приближения функции f в точке x_0* (формула (5)) или *в точке x* (формула (6)). Отбросив в этих формулах последние слагаемые, мы получим *приближенные формулы* (линейные приближения)

$$f(x+h) \approx f(x) + f'(x)h \quad (7)$$

и

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad (8)$$

абсолютная погрешность вычисления по которым равна $|R|$, а погрешность по отношению к приращению аргумента (h или $x - x_0$) стремится к нулю (при $h \rightarrow 0$ или $x \rightarrow x_0$).

Иначе формулы (5)–(6) называются *формулами Тейлора* первого порядка с *остаточным членом* $R = h\alpha_x(h)$ или $(x - x_0)\alpha(x)$. Если функция f в окрестности точки, в которой рассматривается линейное приближение, «достаточно хорошая», то остаточный член имеет *порядок* h^2 . Например, если f имеет вторую производную¹ $f''(x) \stackrel{\text{def}}{=} (f'(x))'$, то он может быть записан в виде $R = \frac{1}{2}f''(c)h^2$, где c — какая-то точка между x и $x+h$ (говорят, это *остаточный член в форме Лагранжа*). Естественно, при малых значениях h членом порядка h^2 можно пренебречь по сравнению с линейным членом $f'(x)h$ (конечно, в случае, когда он *отличен от нуля*, т. е. $f'(x) \neq 0$), и приближенные формулы (7)–(8) имеют большую точность.

Брук Тейлор (1685–1731) — английский математик и философ, приверженец Ньютона в его «споре» с Лейбницем о приоритете в открытии математического анализа, член и секретарь Лондонского королевского общества (Royal Society — аналога Академии наук), обессмертивший свое имя открытием (в 1712 г.) указанной формулы (произвольного порядка) и соответствующего бесконечного *степенного ряда* (о них см. далее § 3.1, 3.3).

Пример 1. Для функции $f(x) = \sqrt{x}$ при $x > 0$ формула (5) имеет вид

$$\sqrt{x+h} \approx \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot h.$$

Воспользуемся этой формулой для вычисления приближенного значения числа $\sqrt{17}$, для чего запишем число 17 в виде $16 + 1 = x + h$. Тогда

¹Значок «def» означает «равенство по определению».

$\sqrt{x} = \sqrt{16} = 4$, и линейное приближение дает

$$\sqrt{17} = \sqrt{16+1} \approx \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot h = 4 + \frac{1}{2 \cdot 4} \cdot 1 = 4 + \frac{1}{8} = 4,125.$$

Точные вычисления значения $\sqrt{17}$ дают $4,123105\dots$, так что абсолютная погрешность формулы линейного приближения в данном случае меньше двух тысячных! $\square$

Заметим, что если для какого-то числа k можно записать, что

$$f(x+h) = f(x) + kh + h\alpha(h), \quad (9)$$

где $\alpha(h)$ — бесконечно малая в нуле, то из формулы (9) получаем

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - k = \alpha(h) \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0,$$

поэтому существует предел выписанного отношения при $h \rightarrow 0$, причем он равен k . Иными словами, существует производная $f'(x) = k$ (см. п. 1.1.1).

Следовательно, существование представления (*линейного приближения*) вида (9) эквивалентно условию дифференцируемости (существования производной) функции, а коэффициент k линейного приближения и есть производная $f'(x)$.

Именно существование линейного приближения вида (9) выбрал в качестве *определения дифференцируемости* Карл Вейерштрасс в своих лекциях 1861 г. Он утверждал, что как раз это определение отражает «истинный смысл производной». Заметим, что из наших рассуждений следует, что *из всех прямых, проходящих через точку $M_0(x_0; f(x_0))$, именно касательная, угловой коэффициент которой равен производной* (по определению касательной!), *наиболее близко принадлежит к графику функции $y = f(x)$ в окрестности этой точки* — в том смысле, что для разности $R = f(x) - f(x_0) - k(x - x_0)$ выполняется соотношение

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R}{x - x_0} = 0 \Leftrightarrow k = f'(x_0)$$

(обдумайте). Это утверждение, называемое *теоремой о линейном приближении*, и является, по Вейерштрассу, сутью определения производной. Собственно вейерштрассов подход к «истинному смыслу» производной нам далее не нужен — достаточно будет наглядного, геометрического и излагаемого ниже *кинематического* ее «смыслов», интерпретаций. Однако теорема о линейном приближении и серия формул (5)–(8) пригодятся при анализе простейших эволюционных и динамических моделей (о последних речь в следующем параграфе).

Уже упоминавшийся немецкий математик Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс (1815–1897; между прочим, учитель Софьи Ковалевской) уделял особое внимание строгому обоснованию математического анализа. Так в 1861 г. он впервые строго сформулировал определение предела на современном языке, ввел понятие окрестности точки и вообще «навел полный порядок» в изложении анализа. Именно Вейерштрасс ввел понятие абсолютного значения (модуля) действительного числа и само обозначение $|x|$. Строгое введение рациональных и иррациональных действительных чисел у него базировалось на понятии предела последовательности сумм дробей,

в частности десятичных (так что, как поныне принято и в школьных учебниках, действительное число трактовалось как бесконечная десятичная дробь). К этому кругу вопросов относится и входящая в школьный курс алгебры и начал анализа *теорема Вейерштрасса о достижении наибольшего/наименьшего значений* (одна из многих, носящих его имя). Один из основоположников математики XX в. Давид Гильберт (1862–1943) очень высоко ценил вклад Вейерштрасса в математическое образование и в саму математическую науку, заметив в 1900 г. по этому поводу: «Заблуждение думать, что строгость в проведении доказательств — враг простоты. Напротив, многочисленные примеры показывают, что более строгий метод является также наиболее простым и доступным». Мы не будем оспаривать эту точку зрения.

1.1.4. Движение по прямой. Для описания движения материальной точки *по прямой* достаточно ввести на этой прямой координаты, или, иначе, считать прямую *координатной осью* — скажем, Ox , — и рассмотреть числовую функцию $x = x(t)$, задающую координату точки в момент времени t . Тогда и *скорость движения*, которая, в соответствии с определением скорости, приняты в физике (механике), равна производной от координаты по времени, есть числовая функция $v = v(t) = x'(t)$. Такова же и скорость изменения скорости, т. е. *ускорение*: скалярная функция $a = a(t) = v'(t) = x''(t)$, т. е. *вторая производная* координатной функции $x(t)$, которую называют также *законом движения*. Тем самым мы приготовились к описанию простейших кинематических моделей движения по прямой.

Движение по прямой или вдоль прямой — как бы самое простое из движений, однако и его описание в *динамических* моделях, относящихся к движениям под действием известной силы, далеко не просто (см. § 1.2 и гл. V). Пока мы ограничимся простейшей кинематической моделью.

Кинематика — от греч. κινεω (кинео) — «двигать», κίνημα(τος) (кинема(тос)) — «движение» («движущийся») — раздел *механики*, в котором движение рассматривается только с геометрической точки зрения, безотносительно к его вызвавшему «причинам», т. е. *силам*.

Динамика — от греч. δυναμις (динамис) — «сила», δυναμικός (динамикос) — «имеющий силу», «сильный» — раздел *механики*, изучающий движение в зависимости от действующих сил. Динамикой также называют состояние, ход движения или какого-либо изменения (например, *динамика численности популяции* — см. далее).

Наконец, наименование «*механика*» происходит от греч. μηχανή (механе) — «орудие», «машина» (а также «выдумка», «хитрость», «средство», «приспособление»), μηχανικός (механикос) — «механический» в смысле «относящийся к машинам» (а также «изобретательный», «хитрый»!). *Классическая механика* (в отличие от *квантовой*) изучает перемещения в пространстве¹ с различных точек зрения; *теоретическая механика* занимается общими законами движения и в каком-то смысле может считаться особым разделом математики (один из объектов изучения механики — как раз *дифференциальные уравнения*).

¹Мы пока рассматриваем движение *по прямой*, являющееся частным случаем движения в пространстве; см. далее п. 1.1.6

Пример 2. Движение без ускорения, т. е. с ускорением, равным нулю, задается соотношением

$$a(t) = v'(t) \equiv 0, \quad \text{или} \quad x''(t) \equiv 0.$$

С точки зрения математики записанные соотношения суть *дифференциальные уравнения*, т. е. уравнения, неизвестными в которых являются не числа, как в алгебраических уравнениях, а *функции*, причем известна (записана как уравнения) информация о производных искомых функций.

Дифференциальное уравнение *первого порядка* (с первой производной) $v' = 0$ означает, что скорость изменения функции $v(t)$ нулевая, т. е. функция «не меняется», является постоянной, *константой*¹, $v(t) \equiv 0 = \text{const}$. Строгое доказательство этого факта (*признака постоянства функции*: если на промежутке I выполняется соотношение $f'(x) \equiv 0$, то $f(x) = \text{const}$ на I) использует *теорему Лагранжа о конечном приращении*; оно приведено в § 2.1.

Дифференциальное уравнение *второго порядка* (со второй производной) $x'' = 0$ записываем как «цепочку» (или *систему*) дифференциальных уравнений первого порядка:

$$x' = v, \quad v' = 0.$$

Второе из этих уравнений мы уже решили: $v(t) = v_0 = \text{const}$, так что остается разрешить первое уравнение, принимающее вид $x' \equiv v_0$. Изменение с *постоянной скоростью* описывается, например, *прямой пропорциональной зависимостью* $x = v_0 t$ (тогда $x' = (v_0 t)' = v_0$), но, как и выше, к этой функции $v_0 t$ можно добавить *произвольную константу*. Получается, что координата меняется по линейному закону $x(t) = v_0 t + \text{const}$, причем $x(0) = 0 + \text{const} = \text{const}$, так что кинематический смысл константы в том, что она равна координате в нулевой момент времени, $x(0) = x_0$.

Таким образом, закон движения без ускорения задается *линейной функцией* $x(t) = At + B$, где константы A и B однозначно определяются *начальными условиями*: $A = x'(0) = v(0) = v_0$, $B = x(0) = x_0$. Такое движение называется *равномерным*. $\square$

1.1.5. Одномерные эволюционные модели. Во многих случаях состояние той или иной системы характеризуется одним параметром, $x = x(t)$. С точки зрения математики изучение такой системы — все равно, что анализ *движения воображаемой точки* $X_t = X_t(x(t))$ по *прямой* — оси Ox . В этом случае ось Ox играет роль совокупности всех

¹От лат. constans, constantis — «постоянный»; отсюда же и имя Константин!

возможных *конфигураций, состояний* системы, в общем случае называемой ее *конфигурационным пространством*. Здесь конфигурационное пространство *одномерно*, ибо состояние описывается всего одним числом, и говорят об *одномерных системах* (или системах «с одной степенью свободы») и об отвечающих им *одномерных моделях*.

Как уже говорилось в начале параграфа, часто бывает известна (из эксперимента, либо из теоретических рассуждений) информация о скорости изменения величины $x(t)$, т. е. о *производной* $x'(t)$. Как правило, скорость изменения зависит только от значения самой величины, и можно записать соответствующее *дифференциальное уравнение*

$$x'(t) = F(x(t)), \quad \text{или} \quad x' = F(x), \quad (10)$$

которое и является *математической моделью* эволюционирующей одномерной системы.

Такая ситуация типична, например, для моделей эволюции биологических систем, относящихся к *одной популяции*¹. Они формулируются как *законы изменения численности популяции* $x = x(t)$, записанные через *скорость* $x'(t)$ изменения этой численности (измеряемой в тех или иных единицах; популяция считается *достаточно большой* для того, чтобы изменение численности $x(t)$ можно было считать *непрерывным* и говорить о *скорости изменения*). Приведем несколько простейших примеров.

Пример 3. *Линейная модель*, дающая, как мы увидим в гл. III, быстрый (*экспоненциальный*) рост численности популяции при *линейной зависимости скорости роста от численности* (при достаточных «жизненных» условиях — при наличии жизненного пространства и питательной среды), описывается *линейным* дифференциальным уравнением

$$x'(t) = \alpha x(t).$$

Конкретный пример: «*не очень много карасей в очень большом пруду*».

Иногда выписанный закон изменения называется *уравнением Мальтуса*, так как предположительно первым его получил в 1798 г. английский экономист и священник Т. Р. Мальтус (1766–1734). Мальтус применил указанный закон к описанию демографической² ситуации в масштабах всей планеты, предсказывая перенаселенность при относительной

¹ *Популяция* (от лат. *populus* — «народ»; франц., англ. *population* — «население») — совокупность особей одного вида с общим местом обитания, способная длительно существовать во времени и пространстве, а также самовоспроизводиться как элементарная единица эволюционного процесса. (Право, в этом определении не хватает единственно дифференциального уравнения, не так ли?!)

² *Демография* (от греч. *δημος* (демос) — «народ» и *γραφω* (графо) — «писать», «записывать») — наука о народонаселении.

ограниченности средств существования людей (эта концепция получила название *мальтузианство*). $\square$

Пример 4. *Логистическая модель* (или *уравнение Ферхюльста*) учитывает, что при большой численности популяции наряду с пропорциональным численности $n = n(t)$ *приростом* имеет место и пропорциональная квадрату численности *убыль* популяции:

$$n'(t) = \alpha n(t) - \gamma n^2(t),$$

или, после замены $x = \gamma n$,

$$x'(t) = x(t)(\alpha - x(t)).$$

Эту примечательную модель мы подробно проанализируем в гл. IV. Конкретный пример: «*караси в не очень большом пруду*». $\square$

Пример 5. *Квадратичная модель*, когда скорость роста численности популяции пропорциональна квадрату численности:

$$n'(t) = \alpha n^2(t),$$

или, после замены $x = \alpha n$,

$$x'(t) = x^2(t).$$

Эта модель приводит, как будет показано в § 4.1, к популяционному «взрыву». Аналогичным уравнением описываются и некоторые химические реакции, предсказывая настоящий взрыв. $\square$

Во всех этих примерах популяции развивались сами по себе — без внешних воздействий, вмешательства извне. Поэтому все три дифференциальных уравнения имели вид (10) $x' = F(x)$, где функция в правой части зависит только от значения меняющегося параметра x и не зависит от времени. Подобные уравнения и модели называются *автономными*¹. Для настоящих природных систем это типично — говоря словами известного российского математика Владимира Игоревича Арнольда², «*от времени законы природы не зависят*».

Однако в некоторых случаях приходится учитывать и зависящие от времени внешние воздействия — например, отлов карасей в пруду или, наоборот, их добавление, выпуск в пруд (время от времени!). Моделями таких систем будут уже *неавтономные* дифференциальные уравнения, имеющие вид

$$x' = F(x, t) \quad (x'(t) = F(x(t), t)). \quad (11)$$

Конкретные примеры систем такого рода приводятся в гл. III и V.

¹ *Автономный* (греч. αυτονομος (автономос), от авто, (авто) — «сам» и νομος (номос) — «закон») означает самоуправляющийся, самостоятельный.

²Одного из крупнейших в мире специалистов по дифференциальным уравнениям и динамическим системам.

В чем состоит задача исследователя, если модель эволюционного процесса уже построена: записано соответствующее дифференциальное уравнение? Сначала в том, чтобы *найти все решения* дифференциального уравнения. Отыскание всех решений того или иного дифференциального уравнения по традиции называют еще и *интегрированием* этого дифференциального уравнения, а до 1770-х гг. (до работ Лагранжа) и сами *решения* дифференциальных уравнений называли «интегралами». Причина этого будет прояснена в следующей главе.

Как будет показано в гл. IV, всякое автономное уравнение вида (10) может быть в определенном смысле «проинтегрировано». После этого нужно исследовать свойства решений уравнения в зависимости от тех или иных *начальных условий*, проинтерпретировать их в терминах исходной прикладной задачи и, при возможности, предсказать возможное «поведение» рассматриваемой (в данном случае одномерной) системы. Ну а потом, конечно, следовало бы проверить сделанные выводы, однако, как мы увидим в § 3.4, эксперимент по проверке теоретических выводов может оказаться небезопасным.

Как будет ясно из гл. IV, возможность проинтегрировать дифференциальное уравнение вида (10) вовсе не означает выражение его решений в *элементарных функциях* (к которым относятся рациональные и иррациональные алгебраические функции, тригонометрические, логарифмические и показательные функции, а также все функции, получаемые из указанных с помощью арифметических действий и операции взятия *композиции*, т. е. «функции от функции»). А неавтономные уравнения вида (11) могут оказаться вообще неинтегрируемыми (в смысле, разъясняемом в гл. IV). В том и другом случае возникает необходимость *качественного исследования* поведения решений дифференциального уравнения. Простейшие приемы такого исследования мы рассмотрим в следующей главе (в § 2.2), а вообще-то существует особая качественная *теория дифференциальных уравнений*, о которой мы упомянем в гл. V.

1.1.6. Производные и скорости в механике (кинематике).

Вернемся к связи понятий производной и скорости. Реальные движения реальных тел происходят в пространстве. Моделируемое движение материальных точек также нужно рассматривать в пространстве или иногда (скажем при движении камня, брошенного под углом к горизонту) в какой-то плоскости. Для кинематического описания таких движений уже не достаточно одной числовой функции. Выходов из положения имеется два.

Первая возможность: рассматривать вместо числовой *векторно-значную* функцию времени $t \mapsto \vec{r}(t) = \overline{OM}_t$, где O — выбранное *начало отсчета*, M_t — положение движущейся точки в момент времени t . Вектор $\vec{r} = \overline{OM}$ часто называют *радиус-вектором* точки M , а векторнозначную функцию $\vec{r} = \vec{r}(t)$ — просто *вектор-функцией*.

Название *радиус-вектор*, по сути фигурировавшее уже во 2-м законе Кеплера (1618 г.), в 1853 г. предложил один из основателей строгого математического анализа, знаменитый французский математик Огюстен Луи Коши (1789–1857). Лат. *radius* — «спица» (в колесе), «луч»; примечательно, что термин «радиус» был введен сравнительно недавно — только в 1569 г. французским математиком и философом Рамусом (настоящее имя — Пьер де ла Рам, 1515–24.8.1572, погиб в Варфоломеевскую ночь).

Второй подход: выбрать в пространстве (прямоугольную) систему координат $Oxyz$ и рассматривать *три* числовые функции

$$(x; y; z) = (x(t); y(t); z(t)),$$

которые суть соответствующие координаты движущейся точки M_t .

Конечно, эти подходы связаны между собой: координаты вектора $\vec{r}(t)$ суть как раз $(x(t); y(t); z(t))$. Однако если при втором подходе «напрашивается» покоординатное определение скорости движения

$$(v_x; v_y; v_z) = (x'(t); y'(t); z'(t)),$$

то при описании движения с помощью векторнозначных функций потребуются отдельно ввести понятие их производных. Оно вполне естественно и в точности следует определению *мгновенной скорости* в физике (механике).

Именно, для определения мгновенной скорости в момент времени t рассматривается *приращение пути* за время от t до $t+h$, т. е. вектор

$$\overline{\Delta r} = \vec{r}(t+h) - \vec{r}(t) = \overline{OM_{t+h}} - \overline{OM_t} = \overline{M_t M_{t+h}},$$

потом делением на h (в математике¹ — умножением на h^{-1}) вычисляется средняя скорость на этом промежутке времени, и затем вычисляется *предел вектора средней скорости* при $h \rightarrow 0$ — *вектор*, который (в случае существования предела) и называется мгновенной скоростью движения или производной векторнозначной функции $\vec{r}(t)$ в точке (в момент времени) t :

$$\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta r}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)).$$

Здесь нуждается в пояснении определение понятия *предела векторнозначной функции*. Оно дословно повторяет определение предела обычной числовой функции и проще всего может быть записано на «вейерштрассовом языке» ε - δ (ср. с определением бесконечно малой из п. 1.1.1): для векторнозначной функции $\vec{a} = \vec{a}(h)$ и вектора $\vec{c}$ выполняется соотношение

$$\lim_{h \rightarrow 0} \vec{a}(h) = \vec{c} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall h \in (-\delta, \delta) |\vec{a}(h) - \vec{c}| < \varepsilon$$

¹В математике не делят, а только умножают векторы на числа.

(как обычно, модуль, или абсолютная величина вектора есть попросту его длина).

Возникает вопрос: как векторное определение скорости связано с координатным? Ответ лучше сформулировать в терминах пределов.

Теорема 1 (о пределе векторнозначной функции в координатах). *Если в системе координат $Oxyz$ векторнозначная функция $\vec{a}(h)$ записывается координатными функциями $(x(h); y(h); z(h))$, вектор $\vec{c}$ имеет координаты $(x_c; y_c; z_c)$, то предел $\vec{a}(h)$ при $h \rightarrow 0$ существует и равен $\vec{c}$ тогда и только тогда, когда пределы всех трех координатных функций $x(h); y(h); z(h)$ существуют и равны соответственно $x_c; y_c; z_c$.*

Доказательство. Запишем фигурирующий в определении предела модуль разности векторов $|\vec{a}(h) - \vec{c}|$ через координатные функции:

$$|\vec{a}(h) - \vec{c}| = \sqrt{(x(h) - x_c)^2 + (y(h) - y_c)^2 + (z(h) - z_c)^2}.$$

Из этого равенства следует, что если все три возводимые в квадрат разности координат стремятся к нулю, то и рассматриваемый модуль разности векторов стремится к нулю — из существования пределов координатных функций вытекает существование предела векторнозначной функции, причем этот предел (вектор) имеет координатами пределы координатных функций.

Чтобы доказать обратное, заметим, что всегда

$$\max\{|x(h) - x_c|, |y(h) - y_c|, |z(h) - z_c|\} \leq \sqrt{(x(h) - x_c)^2 + (y(h) - y_c)^2 + (z(h) - z_c)^2} = |\vec{a}(h) - \vec{c}|.$$

Значит, если модуль разности векторов стремится к нулю, таковы же и выписанные модули разностей координат. Поэтому из существования предела векторнозначной функции вытекает существование соответствующих пределов координатных функций, что и оставалось установить. $\square$

Следствие 1 (о производной векторнозначной функции в координатах). *В системе координат $Oxyz$ векторнозначная функция $\vec{r}(t)$ записывается координатными функциями $(x(t); y(t); z(t))$. Производная $\vec{r}'(t)$ существует тогда и только тогда, когда существуют производные $x'(t); y'(t); z'(t)$ координатных функций, причем координаты вектора $\vec{r}'(t)$ суть $(x'(t); y'(t); z'(t))$.*

Таким образом, все равно, вычислять ли скорость как вектор или вычислять ее по координатам.

1.1.7. Геометрический (кинематический) смысл вектора скорости. Совокупность всех положений M_t , $t \in \mathbb{R}$ (или t принадле-

жит какому-то промежутку изменения времени), называется *траекторией* движения точки. Если это движение описывается векторнозначной функцией $\vec{r} = \vec{r}(t)$, то траектория называется еще и *годографом* этой векторнозначной функции.

Траектория — от лат. *trajectorius* — относящийся к перемещению, передвижению. Слово *годограф* происходит от греческих слов *обос*, *ходос*, — «дорога» и *урафω*, *графо*, — «пишу», «рисую», так что его смысл — «дорога, описанная чем-либо». Данные понятие и термин были введены упоминавшимся выше Уильямом Гамильтоном при изучении криволинейного движения материальной точки.

Заметим, что в случае ненулевого перемещения вектор перемещения $\overline{\Delta r} = \overline{M_t M_{t+h}}$ направлен вдоль секущей $M_t M_{t+h}$ к траектории (рис. 3). Так же направлен и вектор средней скорости $t^{-1} \overline{\Delta r}$, и вектор мгновенной скорости $\vec{v}(t) = \vec{r}'(t)$ при условии, что он отличен от нуля. В этом случае *существует предельное положение секущей $M_t M_{t+h}$ при $h \rightarrow 0$, т. е. при $M_{t+h} \rightarrow M_t$* . Как и для графиков функций (см. п. 1.1.2), предельное положение секущей называется касательной к графику, так что из проведенного рассуждения получается, что *вектор скорости при движении материальной точки направлен по касательной* (рис. 4).

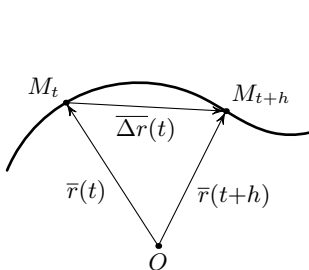


Рис. 3

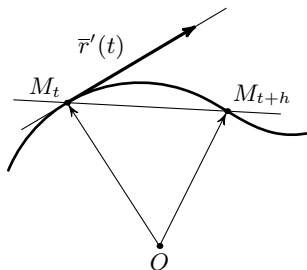


Рис. 4

С другой стороны, модуль вектора производной, т. е. $|\vec{v}(t)| = |\vec{r}'(t)|$, абсолютная величина скорости, оказывается равным *скорости изменения длины пройденного пути*, т. е. скорости движения точки по годографу. Мы не будем доказывать это интуитивно ясное утверждение.

Пример 6. Один из основных типов движений — *вращательное движение в плоскости*, т. е. вращение около центра O (его как раз удобно выбрать в качестве начала радиус-векторов) с постоянной угловой скоростью $\omega \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ или просто $\omega \text{ с}^{-1}$ — удобно записывать с помощью поворотов векторов:

$$M_t = R^{\omega t} M_0, \quad \text{или} \quad \vec{r}(t) = R^{\omega t}(\overline{OM_0}) = r_0 \cdot R^{\omega t} \vec{e},$$

где $r_0 = OM_0$ — расстояние точки от центра вращения, $\vec{e}$ — единичный вектор, направленный вдоль прямой OM_0 . Если выбрать в плоскости

вращения (прямоугольную) систему координат Oxy , направив ось Ox вдоль вектора $\vec{e}$, то *согласно определению косинуса и синуса* координатами вектора $R^{\omega t}\vec{e}$ будут $(\cos \omega t; \sin \omega t)$, так что координатная запись указанной векторнозначной функции имеет вид

$$\vec{r}(t) = (r_0 \cos \omega t; r_0 \sin \omega t).$$

Отсюда согласно следствию 1 вытекает, что

$$\vec{r}'(t) = (r_0(\cos \omega t)'; r_0(\sin \omega t)').$$

С другой стороны, вектор скорости $\vec{r}'(t)$ при вращении с угловой скоростью ω легко найти, основываясь на геометрическом (кинематическом) его смысле: он направлен по касательной к траектории, т. е. к окружности, в сторону вращения, а его абсолютная величина равна линейной скорости движения по окружности, т. е. $v_0 = \omega r_0$ (рис. 5).

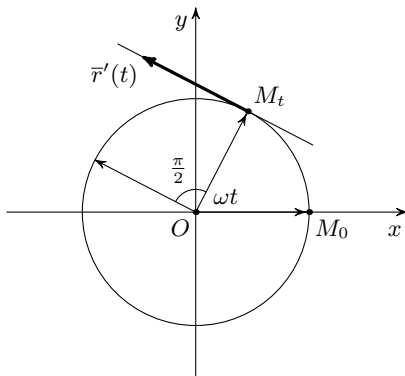


Рис. 5

Так как касательная к окружности в точке M_t перпендикулярна радиусу OM_t , вектор $\vec{r}'(t)$ получается из вектора $\vec{r}(t)$ поворотом на 90° или $\frac{\pi}{2}$ радиан с последующим умножением на ω , так что можно записать

$$\vec{r}'(t) = \omega r_0 R^{\omega t + \frac{\pi}{2}} \vec{e} = \left(\omega r_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right); \omega r_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \right).$$

Сопоставляя эту формулу с предыдущей, мы получаем *красивые формулы дифференцирования косинуса и синуса*

$$(\cos \omega t)' = \omega \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right), \quad (\sin \omega t)' = \omega \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Конечно, из них с помощью *формул приведения* получаются и стандартные формулы: $(\cos \omega t)' = -\omega \sin \omega t$, $(\sin \omega t)' = \omega \cos \omega t$. Вот какие примечательные результаты можно получить из простых геометрически-кинематических соображений. $\square$

1.1.8. Двумерная эволюционная модель Вольтерры—Лотки. При исследовании эволюционирующих систем часто приходится рассматривать сразу несколько характеризующих их состояние параметров, скажем два. Тогда нужно рассмотреть *две* функции $x = x(t)$, $y = y(t)$, описывающие изменения обоих параметров во времени. С парой функций можно связать *воображаемую* точку M_t с координатами $(x(t); y(t))$ и рассматривать ее *воображаемое* движение по *конфигурационному пространству*, которое в рассматриваемом случае будет *двумерным*, т. е. *конфигурационной плоскостью* Oxy или какой-то ее частью.

Пример 7. Рассмотрим простейшую двумерную эволюционную модель *биоценоза*¹, состоящего из двух взаимодействующих популяций, когда в *пруду сосуществуют караси и щуки*. Конечно, это не мирное сосуществование: *хищники* (щуки) живут только за счет поедания *жертв* (карасей). Сами же жертвы — *травоядные*», т. е. поедают только растительный корм, которого достаточно.

Обозначим численность популяции жертв через $x = x(t)$, а популяции хищников — через $y = y(t)$. При отсутствии хищников *x -популяция* росла бы по закону Мальтуса: $x' = ax$. При наличии же *y -популяции* хищников наряду с приростом x -популяции со скоростью ax нужно учесть и «убыль» жертв. Простейшая гипотеза относительно убыли основана на «теории встреч» — на предположении, что скорость уменьшения численности жертв пропорциональна числу возможных встреч между хищником и жертвой, т. е. произведению численностей x -популяции и y -популяции (считается, что *каждый* хищник может встретиться с *каждой* жертвой и с некоторой вероятностью съесть ее!). Эта гипотеза приводит к дифференциальному уравнению для численности x -популяции:

$$x'(t) = ax(t) - bx(t)y(t)$$

(константы a и b , как и появляющиеся далее константы c и d , положительны).

Теперь разберемся с хищниками. Их прирост происходит только за счет поедания жертв, и, по той же «теории встреч», скорость прироста пропорциональна произведению численностей x -популяции и y -популяции. Это дает слагаемое вида $c \cdot x \cdot y$ в скорости $y'(t)$ изменения численности y -популяции. Однако нужно учесть и естественную убыль хищников, пропорциональную их численности и играющую существенную

¹ *Биоценоз* (от греч. βίος (биос) — «жизнь», «образ жизни», «средства к жизни» и κοινός (койнос) — «общий») — участок общей среды обитания животных, растений и микроорганизмов.

(как потом будет видно, *стабилизирующую*) роль, когда y -популяция велика (многочисленна) или x -популяция мала (малочисленна), т. е. пищи (жертв) становится недостаточно. Таким образом, скорость $y'(t)$ изменения численности y -популяции записывается в виде

$$y'(t) = cx(t)y(t) - dy(t).$$

Итак, мы приходим к системе двух уравнений

$$\begin{cases} x'(t) = ax - bxy, \\ y'(t) = cxy - dy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'(t) = x(a - by), \\ y'(t) = y(cx - d), \end{cases}$$

рассматриваемых только на I четверти $x > 0, y > 0$ плоскости Oxy (плоскости «жертва»-«хищник»). Эта система дифференциальных уравнений — простейшая модель «борьбы за существование», или, как еще говорят, *модель системы «хищник-жертва»*. Эта модель (соответствующая система уравнений) называется *моделью Вольтерры—Лотки*.

Вито Вольтерра (1860–1940) — итальянский математик, занимавшийся как «чистой», так и прикладной математикой: математической физикой, приложениями математики в биологии и в социальных исследованиях. Именно им была разработана математическая теория борьбы за существование и демографической динамики. В 1920-е гг. и позже Вольтерра предложил не только указанную модель развития биоценозов, но и ряд других (им опубликовано около 30 работ на эти темы).

Альфред Джеймс Лотка (1880–1949) — американский математик, независимо от Вольтерры предложивший ту же модель биоценоза и продолживший его разработки.

Мы проанализируем модель Вольтерры—Лотки в специальном параграфе в конце этой части (в § 6.4). $\square$

Выписанная система уравнений — это частный случай *автономной системы двух дифференциальных уравнений*, записываемой как

$$\begin{cases} x'(t) = A(x, y), \\ y'(t) = B(x, y) \end{cases}$$

и трактуемой как *дифференциальное уравнение на плоскости*. Решениями такой системы на каком-то промежутке изменения времени, $t \in I$, являются *пары* таких дифференцируемых функций $x(t), y(t)$, что при любом значении $t \in I$ выполняется соотношение

$$\begin{cases} x'(t) = A(x(t), y(t)), \\ y'(t) = B(x(t), y(t)). \end{cases}$$

Если наряду с воображаемой точкой M_t с координатами $(x(t); y(t))$ на конфигурационной плоскости Oxy (или на ее части, как в модели Вольтерры—Лотки) рассмотреть векторнозначную функцию $\vec{r}(t) = \overline{OM_t}$, а также от каждой точки $M(x; y)$ плоскости отложить *вектор*

$\bar{V}(x, y)$ с координатами $(A(x, y); B(x, y))$, то в соответствии со следствием 1 рассматриваемую систему дифференциальных уравнений можно записать как *одно векторное дифференциальное уравнение*

$$\bar{r}'(t) = \bar{V}(x, y) = \bar{V}(\bar{r}) \quad (12)$$

(мы точку $M(x, y)$ заменили на ее радиус-вектор $\bar{r} = \overline{OM}$). А из геометрического смысла производной вектор-функции следует, что (воображаемая) траектория $t \mapsto M_t$, отвечающая решению $\bar{r}(t)$ последнего уравнения, *в каждой своей точке касается приложенного к этой точке вектора $\bar{V}(x, y) = \bar{V}(\bar{r})$* . Вот вам и *геометрический смысл векторного дифференциального уравнения (12)* или исходной системы дифференциальных уравнений.

Заметим, что если состояние системы описывается тремя параметрами, то оно аналогичным указанному выше образом отождествляется с точкой в пространстве. Если же параметров четыре, то конфигурационное пространство уже *четырёхмерно*, и т. д.

Общее понятие *конфигурационного пространства произвольного числа измерений*, оказавшееся очень удобным и плодотворным для математических исследований, ввел в конце XIX в. крупнейший американский физик, механик и математик Джозайя Уиллард Гиббс (1839–1903) — выпускник и профессор Йельского университета, один из основоположников термодинамики и строгой статистической механики.

§ 1.2. Представление о динамических системах

В современной математике динамическими системами называются *любые* (сколь угодно мерные) системы, эволюция которых подчиняется соответствующей системе дифференциальных уравнений. Мы же в данном параграфе рассмотрим простейшие динамические системы классической механики: движение материальной точки по прямой, которая отождествляется с координатной осью Ox , под воздействием направленной вдоль этой прямой силы. В этом случае изначально нет необходимости рассматривать векторнозначные функции — как объяснялось в п. 1.1.4, можно ограничиться скалярными функциями: координатной функцией $x(t)$ и ее производными — скалярными скоростью $v(t) = x'(t)$ и ускорением $a(t) = v'(t) = x''(t)$.

В данном случае и силу можно считать не вектором, а некоторой скалярной функцией, вообще говоря, координаты, скорости и времени, $F = F(x, v, t)$. *Основной закон динамики*, т. е. *второй закон Ньютона*, записывается как *дифференциальное уравнение второго порядка* $ma = mx'' = F(x, v, t)$. Полагая входящую в уравнение массу m равной 1, запишем основное в данном параграфе и в гл. V *дифференциальное*