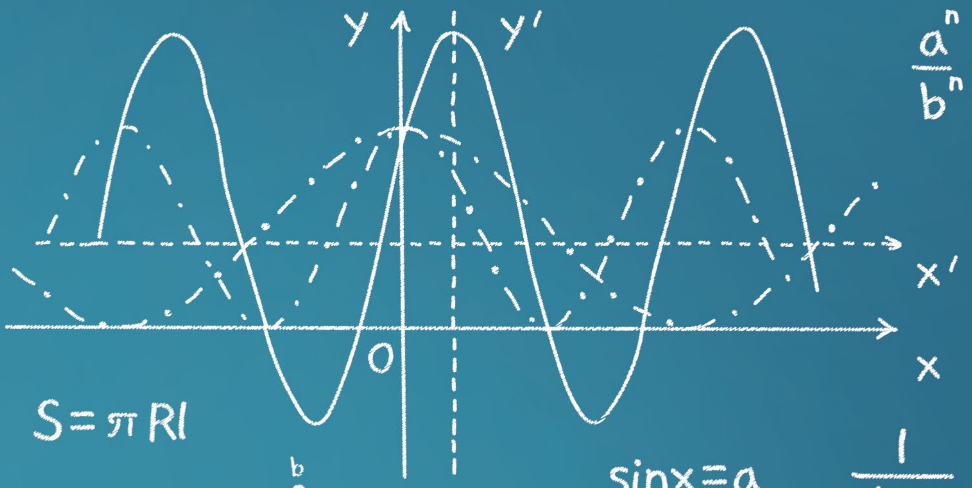
Глава 12

Математическое приложение



А. Овчинников

- ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД
- ВЫЧИСЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ
- ПОВЕДЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ОБЛАСТИ МАЛЫХ УГЛОВ
- НЕМНОГО О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ

Мы старались в нашей книге избегать предельных переходов, дифференцирования и интегрирования, как это принято в школьной программе по физике. Однако довольно часто описать физическое явление языком линейного приближения не получается просто в силу принципиальной нелинейности самого явления. Поэтому мы скажем здесь несколько слов об упоминающихся в наших задачах предельных переходах для тех, кто пока не слишком хорошо знаком с началами анализа.

Начнём с определения момента инерции твёрдого тела. Представим себе систему из n точек с массами m_1, m_2, ..., m_n, соединённых между собой жёсткими, но невесомыми связями (рис. 12.1). И пусть эта система вращается вокруг некоторой оси так, что каждая точка движется по замкнутой кривой.

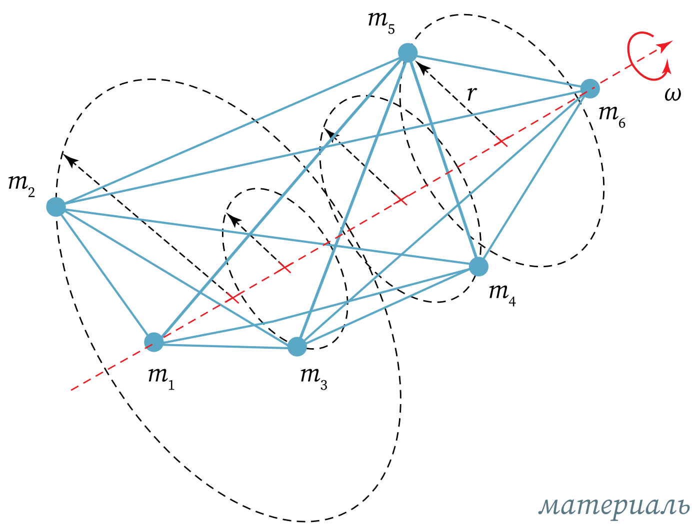


Рис. 12.1
Движение системы материальных точек вокруг оси

Легко сообразить, что траектория такой точки будет окружностью с некоторым радиусом r, определяющимся как расстояние от этой точки до оси вращения, а скорость точки будет равна $v_k = r_k\omega$, где ω — угловая скорость вращения системы.

Тогда, вспомнив определение для кинетической энергии материальной точки $E = (1/2)mv^2$, легко записать выражение для кинетической энергии нашей конструкции:

$$E = \frac{1}{2} m_1 r_1^2 \omega^2 + \frac{1}{2} m_2 r_2^2 \omega^2 + \ldots + \frac{1}{2} m_n r_n^2 \omega^2.$$

Поскольку система у нас жёсткая, ω для всех точек будет одинаковой, а скорости $v_k = \omega r_k$, естественно, разные. Поэтому удобно считать, что функцию эффективной массы в выражении для кинетической энергии вращательного движения будет выполнять величина

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots + m_n r_n^2\,,$$

которую и принято называть моментом инерции системы. Если мы имеем дело со сплошным твёрдым телом с постоянной плотностью, нам придётся перейти от суммы бесконечно большого числа бесконечно малых материальных точек к интегралу (о предельных переходах мы ещё поговорим ниже).

Так, для стержня с удельной плотностью на единицу длины ρ (её размерность — кг/м) с общей массой

$$m = \int_0^l \rho\, dr = l\rho\,,$$

вращающегося вокруг одного из его концов (рис. 12.2), имеем

$$I = \int_0^1 \rho r^2\, dr = \frac{1}{3} \rho l^3 = \frac{1}{3} m l^2.$$

Это выражение мы и использовали, когда писали уравнение для движения ноги футболиста или руки волейболиста.

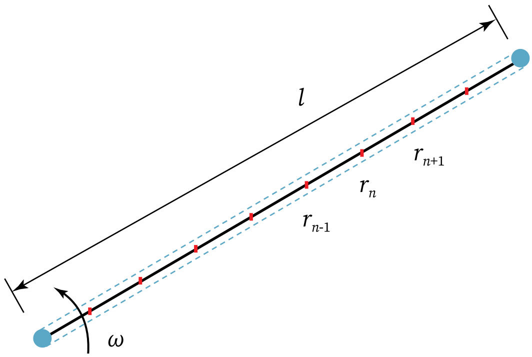


Рис. 12.2
Стержень, вращающийся вокруг своего конца

Собственно, единственное, что мы получили здесь интуитивно не очевидного, — это численный коэффициент 1/3. Давайте посмотрим, откуда он у нас берётся.

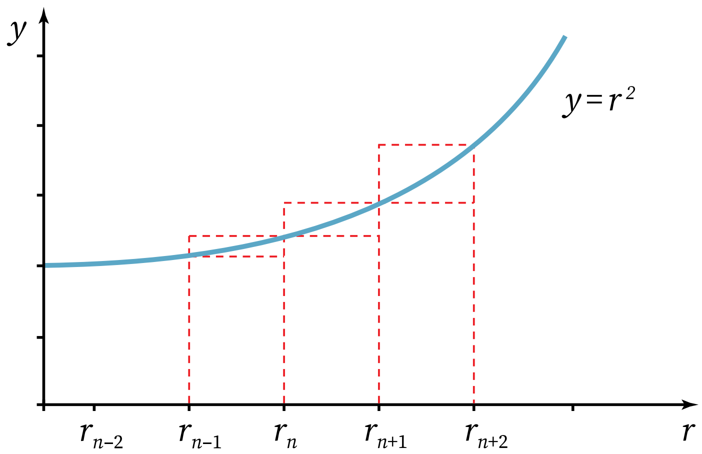
Определённый интеграл можно записать как предел суммы, что, например, в нашем случае будет выглядеть как предел при $|r_{k+1} - r_k| \to 0$ и $n \to \infty$:

$$I = \lim \sum_{k=0}^{n} \left(r_{k+1} - r_k\right) \rho \left(\frac{r_k + r_{k+1}}{2}\right) = \int_0^1 \rho r^2 dr$$

где $r_0 < r_1 < \ldots < r_k < r_{k+1} < \ldots < r_n$ — некоторое разбиение нашего стержня длиной l на n фрагментов. Разность в первых скобках — это длина $(k+1)$-го фрагмента, а полусумма во вторых скобках — значение расстояния до центра масс этого фрагмента.

При этом из геометрических соображений достаточно очевидно, что интеграл с переменным верхним пределом есть первообразная функция подынтегрального выражения (функция, производная от которой и есть заданная функция) — предел отношения приращения площади под кривой, которую мы вычисляем (а выражение, стоящее у нас под знаком суммы, — это очевидно, площадь — произведение ширины на среднюю высоту прямоугольника), к стремящемуся к нулю приращению аргумента и есть по определению производная (рис. 12.3). Мы получили здесь утверждение, являющееся частным случаем, возможно, известной читателю теоремы Ньютона—Лейбница. Доказать её строго несложно, однако мы ограничимся соображениями простой наглядности.

Рис. 12.3
Вычисление площади под кривой



Давайте проверим, что даёт дифференцирование написанного нами значения первообразной функции для нашего стержня. По определению производной

$$\frac{df(r)}{dr} = \lim_{\Delta r \to 0} \frac{f(r+\Delta r) - f(r)}{\Delta r}.$$

Для нашей первообразной $f(r) = r^3$ запишем

$$\frac{dr^3}{dr} = \lim_{\Delta r \to 0} \frac{(r+\Delta r)^3 - r^3}{\Delta r} = \lim_{\Delta r \to 0} \frac{3r^2\Delta r + 3r(\Delta r)^2 + (\Delta r)^3}{\Delta r} = 3r^2,$$

пренебрегая в пределе бесконечно малыми, и получим искомый коэффициент 1/3.

Вычислим теперь момент инерции полой сферы. Такая сфера хорошо моделирует шарик для настольного тенниса, как, впрочем, и почти любой надутый воздухом мяч. Для этого мы построим сечение сферы, перпендикулярное оси вращения (рис. 12.4).

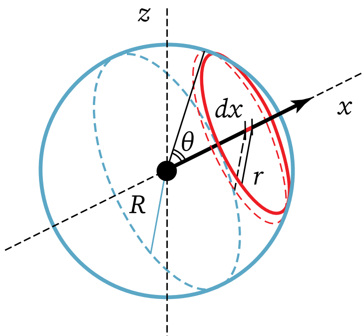


Рис. 12.4
Сечение тонкой сферы

Бесконечно малый элемент дуги кольца (рис. 12.5) по определению равен $dL = rd\varphi$, где r — радиус сечения относительно оси вращения. Элемент массы поверхности можно записать как $dm = \rho r d\varphi dx$, где плотность ρ у нас теперь двумерная, с размерностью кг/м^2, расстояние от центра сферы до кольца равно $x = R\cos\theta$, радиус кольца равен $r = R\sin\theta$, а дифференциал расстояния от центра масс до кольца (его приращение) соответствует бесконечно малой ширине нашего кольца, $dx = -R\sin\theta d\theta$.

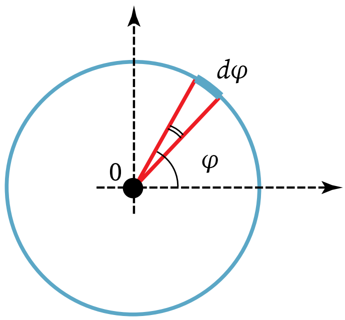


Рис. 12.5

Фрагмент поверхности сечения тонкой сферы

Запишем теперь интеграл по всем таким сечениям для правой половины сферы (момент инерции левой половины, равной правой, мы учтём удвоением результата интегрирования):

$$I = 2\int_0^{2\pi}\int_0^{R} \rho r^3(x)dxd\varphi = 4\pi\rho R^4 \int_0^{\pi/2} \sin^3\theta d\theta =$$

$$= 4\pi\rho R^4 \int_0^1 (1-\cos^2\theta)d\cos\theta = 4\pi\rho R^4(\cos\theta - \frac{1}{3}\cos^3\theta)\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{8}{3}\pi\rho R^4 = \frac{2}{3}mR^2.$$

Здесь мы учли, что площадь поверхности сферы равна $S = 4\pi R^2$. Любознательный читатель может это проверить сам, взяв тот же интеграл, но без члена $\rho r^2 = \rho R^2 \sin^2\theta$ в подынтегральном выражении.

И наконец, найдём момент инерции сплошного шара, который моделирует, например, бейсбольный мяч. Построим сечение шара, аналогичное сечению сферы (рис. 12.6).

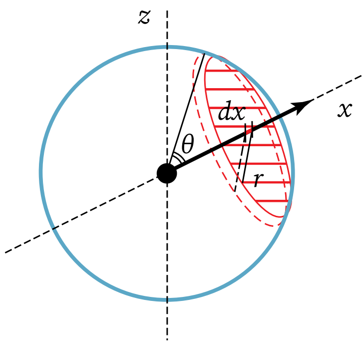


Рис. 12.6
Фрагмент объёма шара

Площадь сечения с углом $d\varphi$ опять же по определению равна $dS = (1/2)r^2 d\varphi$. Умножая площадь сечения на его толщину dx и на r^2 и интегрируя затем все такие сечения вдоль оси вращения от центра шара до его радиуса R с учётом плотности ρ (которая здесь у нас уже трёхмерная, с размерностью кг/м^3), получим выражение для момента инерции:

$$I=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{R}\rho r^4(x)dx\,d\varphi=2\pi\rho R^5\int\limits_0^{\pi/2}\sin^5\theta\,d\theta=$$

$$=2\pi\rho\int\limits_0^{1}(1-\cos^2\theta)^2 d\cos\theta=\frac{8}{15}\pi\rho R^5=\frac{2}{5}mR^2.$$

Здесь мы использовали значение объёма шара $V=(4/3)\pi R^3$, каковое, так же как и в случае сферы, мы можем легко получить, взяв интеграл по объёму шара, аналогичный нашему, но без учёта множителя, соответствующего произведению ρr^2 в подынтегральном выражении.

Рассмотрим теперь поведение тригонометрических функций в области малых углов. Для этого рассмотрим отношение

$$y=\frac{\sin\varphi}{\varphi}$$

при $\varphi\to 0$. Эта функция определена для всех φ, кроме φ = 0. Отметим, что при изменении знака φ величина дроби не меняется, то есть задача симметрична, поэтому достаточно рассмотреть предел со стороны положительных значений φ. Построим окружность с единичным радиусом (рис. 12.7).

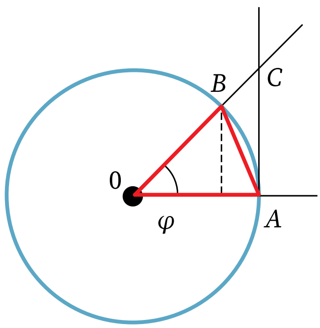


Рис. 12.7
Линейное приближение элемента окружности

Заметив, что площадь треугольника AOB меньше площади сектора окружности AOB, а та, в свою очередь, меньше площади треугольника AOC, запишем из определения

$$\frac{1}{2}\sin\varphi < \frac{1}{2}\varphi < \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi,$$

откуда получим

$$1 < \frac{\varphi}{\sin\varphi} < \frac{1}{\cos\varphi}, \quad \text{или} \quad 1 > \frac{\sin\varphi}{\varphi} > \cos\varphi.$$

Таким образом, при $\varphi \to 0$ искомое отношение лежит между единицей и величиной, стремящейся к единице (значение $\cos\varphi$ при $\varphi = 0$). Иными словами,

$$\lim_{\varphi\to 0} y = \lim_{\varphi\to 0}\frac{\sin\varphi}{\varphi} = 1.$$

Стало быть, при бесконечно малых углах $\varphi = 0$ мы можем пользоваться заменой $\sin\varphi = \varphi$. Существенно отметить, что при выводе этого утверждения мы записали значение величины угла в радианах, что важно не забывать при его использовании.

Посмотрим теперь, как ведёт себя на малых углах $\cos\varphi$. Используя известное тригонометрическое выражение для двойного угла, мы можем написать

$$\frac{1-\cos\varphi}{\varphi^2} = \frac{2\sin^2(\varphi/2)}{\varphi^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(\varphi/2)}{(\varphi/2)}\right)^2,$$

откуда при $\varphi \to 0$ немедленно получим

$$\lim_{\varphi\to 0}\frac{\sin(\varphi/2)}{\varphi/2}=1,$$

и, следовательно,

$$\lim_{\varphi\to 0}\frac{1-\cos\varphi}{\varphi^2}=\frac{1}{2},$$

то есть 1 – cosφ является бесконечно малой второго порядка по сравнению с φ. При этом, как нетрудно заметить,

$$\lim_{\varphi\to 0}\operatorname{tg}\varphi=\lim_{\varphi\to 0}\frac{\varphi}{1-\varphi^2}=\lim_{\varphi\to 0}\sin\varphi=\varphi.$$

Те же результаты, очевидно, следуют из разложения тригонометрических функций в ряд Тейлора, но доказательство справедливости такого разложения, к сожалению, потребовало бы слишком много места в нашем приложении.

Нам также следует сказать несколько слов о дифференциальных уравнениях и их решениях. Идея дифференциального уравнения состоит в том, что мы можем разбить наблюдаемый процесс на малые элементы и эти малые элементы рассматривать в линейном приближении, то есть. считать, что в промежутке изменения независимой переменной (x, $x+dx$) изменение функции $y=f(x)$, описывающей наш процесс (например, зависимость расстояния, пройденного телом, от времени), ему прямо пропорционально. Покажем, что это предположение приводит к ошибке следующего порядка малости по сравнению с dx.

Определим дифференциал функции как произведение её производной на дифференциал (независимое бесконечно малое приращение) независимой переменной:

$$dy = df(x) = f'(x)dx$$

(запись dx здесь ни в коем случае не следует понимать как произведение).

Из определения производной при $\Delta x \to 0$ получаем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon,$$

где $\varepsilon \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Тогда

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \varepsilon \Delta x, \quad \text{или} \quad \Delta y = dy + \varepsilon \Delta x.$$

Стало быть, разница между Δy и dy (рис. 12.8) есть произведение Δx на бесконечно малую величину, то есть бесконечно малая величина высшего порядка (точно так же бесконечно малая в более высокой степени будет бесконечно малой высшего порядка по отношению к низшей степени, чем мы часто пользовались, например, для функций x^2 и x).

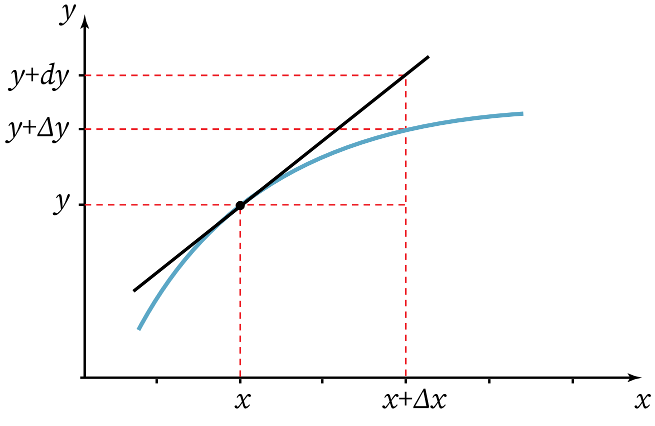


Рис. 12.8
Линейное приближение приращения функции

Из этого же рассуждения хорошо видно, что максимум или минимум непрерывной функции может лежать только в тех точках, в которых производная обращается в ноль (касательная становится параллельной оси x). Это свойство производной мы использовали для поиска оптимальных значений переменных в главах про футбол и регби.

Итак, выполнив такой предельный переход, мы можем записать для интересующего нас процесса уравнение, представляющее собой соотношение между независимой переменной, её функцией и их дифференциалами. Это уравнение и называется дифференциальным, а задача нахождения самой функции из дифференциального уравнения есть задача его интегрирования.

Разберём подробнее встречавшееся нам во второй главе уравнение движения мяча при отскоке

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -Cs.$$

Здесь мы постоянный множитель $2\neq Rp_0/m$ обозначили для удобства через C. Это дифференциальное уравнение второго порядка. Нам надо найти такое значение функции, чтобы при двойном её дифференцировании получить её же с нужным коэффициентом.

Такой функцией будет, например, $y = \sin\varphi$. Найдём её производную непосредственно из определения:

$$\frac{dy}{d\varphi} = \lim_{\delta\to 0}\frac{\sin(\varphi+\delta)-\sin\varphi}{\delta} = \lim_{\delta\to 0}\frac{2\cos(\varphi+\delta/2)\sin(\delta/2)}{\delta} =$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\cos(\varphi+\delta/2)\frac{\sin(\delta/2)}{\delta/2} = \cos\varphi.$$

Здесь мы использовали полученный ранее факт, что если $\varphi \to 0$, то $\sin\varphi = \varphi$.

Однако для второго дифференцирования нам понадобится производная косинуса:

$$\frac{dy}{d\varphi} = \lim_{\delta\to 0}\frac{\cos(\varphi+\delta)-\cos}{\delta} = -\lim_{\delta\to 0}\frac{2\sin(\varphi+\delta/2)\sin(\delta/2)}{\delta} =$$

$$= -\lim_{\delta\to 0}\sin(\varphi+\delta/2)\frac{\sin(\delta/2)}{\delta/2} = -\sin\varphi.$$

Осталось решить, где взять константу. Для этого нам понадобится правило дифференцирования сложной функции. Напомним определение: пусть задана функция $y = f(x)$ и одновременно задана функция $z = F(y)$, тогда сложной функцией мы будем называть функцию

$$z = F(y) = F(f(x)).$$

Разумеется, мы предполагаем, что на рассматриваемом интервале обе функции определены и имеют производные.

По определению интересующая нас производная может быть записана как предел при $\Delta x \to 0$ отношения

$$\frac{\Delta z}{\Delta y} = F'(y) + \varepsilon,$$

где ε — бесконечно малая величина. Отсюда сразу получаем

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \left(F'(y) + \varepsilon\right)\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Переходя к пределу, получим

$$\frac{dz}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = F'(y) f'(x),$$

чем мы и воспользуемся, задав нашу сложную функцию как

$$s = \sin\big(f(t)\big) = \sin(\sqrt{C}t).$$

Это даст при дифференцировании искомый результат:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -C \sin(\sqrt{C}t) = -Cs.$$

Заметим, что постоянный множитель, стоящий перед синусом в решении, предложенном во второй главе, никак на результат не влияет, его надо находить из граничных условий физической задачи. В данном случае это значение начальной скорости мяча в момент контакта с поверхностью.

Говоря о звуке, издаваемом ракеткой при ударе в теннисе, мы воспользовались ещё одной формулой, возникающей из анализа дифференциального уравнения, — формулой для собственных частот колебаний натянутой струны. Давайте посмотрим, как его получить. Если под действием некоторой силы (например, в результате удара по мячу) струна отклонится от состояния равновесия, то возникнет сила, стремящаяся вернуть её обратно.

На рис. 12.9 показан фрагмент струны общей длиной L с удельной плотностью на единицу длины ρ, растянутой между двумя точками крепления с силой натяжения F.

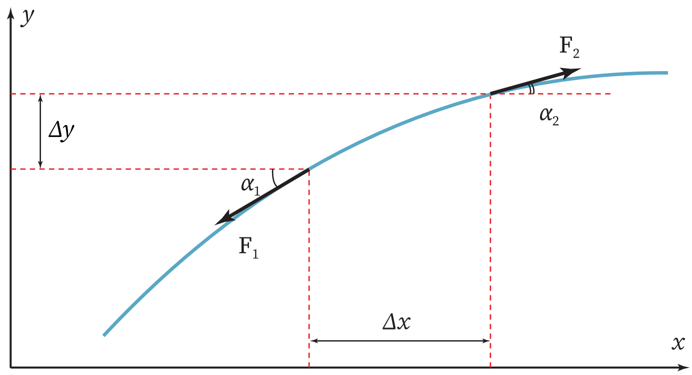


Рис. 12.9
Силы, действующие на элемент струны при отклонении её от положения равновесия

Динамическое уравнение для сил в этой системе можно записать как

$$\Delta x \rho \frac{d^2 y}{dt^2} = F_2 \sin\alpha_2 - F_1 \sin\alpha_1.$$

Покажем, что удлинение струны $(\Delta l - \Delta x)$ — величина следующего порядка малости по отношению к линейному перпендикулярному отклонению $\Delta y = \Delta x \operatorname{tg} \alpha_1$:

$$\Delta l = \sqrt{(\Delta y)^2 + (\Delta x)^2} = \Delta x \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_1} \approx \Delta x (1 + \frac{1}{2}\alpha_1^2) \approx \Delta x$$

(здесь мы воспользовались линейным приближением для приращения функции, полученными выше свойствами тригонометрических функций малых углов и тем, что для малых x можно написать $1 + x \approx \left(1 + (1/2)x\right)^2$ с точностью до малых следующего порядка).

Таким образом, мы можем в нашем рассмотрении пренебречь растяжением струны в процессе колебаний, то есть положить

$F_1 = F_2 = F$. Для углов α_1, α_2 в силу их малости можно, разделив обе части нашего уравнения на Δx, написать

$$\frac{\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1}{\Delta x} \approx \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\Delta x} \approx \frac{\Delta\alpha}{\Delta x} \approx \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

Уравнение приобретёт, таким образом, вид

$$\rho\frac{d^2 y}{dt^2} = F\frac{d^2 y}{dx^2}, \qquad \text{или, иначе,} \qquad \frac{d^2 y}{dt^2} = u^2\frac{d^2 y}{dx^2}.$$

Отметим, что величина $u = \sqrt{F/\rho}$ имеет размерность скорости. Действительно, любое возмущение (например волна) вида $y = f(x - ut)$, распространяющееся по струне со скоростью u, будет решением нашего уравнения.

Мы видим хорошо известное в механике (особенно квантовой) волновое уравнение. Решать его нам не нужно, достаточно заметить, что поскольку для стационарного колебания вблизи равновесия длина волны и частота связаны простым соотношением $\omega\lambda = u$ и на длине L должно помещаться целое число половин длины волны (граничное условие):

$$\lambda_n = \frac{2L}{n},$$

мы получим выражение для частот различных гармоник

$$\omega = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{F}{\rho}},$$

которое мы и использовали для нахождения тона первой моды $(n = 1)$ звучания струны теннисной ракетки.

В главе про регби нам пришлось продифференцировать уравнение, содержащее $\operatorname{arctg}\beta$. Поскольку производные для $\cos x$ и $\sin x$ мы уже знаем, чтобы найти производную от $\operatorname{tg}\alpha$, нам потребуется правило для дифференцирования отношения функций

$$y=\frac{u(x)}{v(x)}.$$

Итак,

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\delta\to 0}\frac{\dfrac{u(x+\delta)}{v(x+\delta)}-\dfrac{u(x)}{v(x)}}{\delta}=$$

$$=\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{v(x)v(x+\delta)}\cdot\frac{u(x+\delta)v(x)-v(x+\delta)u(x)}{\delta}.$$

Вычитая и прибавляя в числителе второй из дробей произведение $u(x)v(x)$, находим

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{v(x)v(x+\delta)}\left(v(x)\frac{u(x+\delta)-u(x)}{\delta}-u(x)\frac{v(x+\delta)-v(x)}{\delta}\right)=$$

$$=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}.$$

Теперь читатель легко получит искомый результат:

$$\frac{d}{d\alpha}\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

Осталось найти выражение для производной обратной функции, то есть такой функции, что если $y=f(x)$, то $\varphi(y)=x$. Легко заметить, что, устремляя одновременно к нулю приращения Δx и Δy в тождестве

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

мы получаем очевидное соотношение

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

И теперь мы можем приступить к поиску интересующего нас экстремума!

На этом мы можем закончить наш небольшой экскурс по математическим аспектам обсуждавшихся задач. Проделав предложенные вычисления самостоятельно, читатель, мы надеемся, не встретит больше никаких математических сюрпризов при внимательном чтении этой книги.

Литература

Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. 1. М.: Гостехиздат, 1961.

Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Ахиезер А. И. Курс общей физики. Механика и молекулярная физика. М.: Добросвет, 2011.

Шубин М. И. «Математический анализ для решения физических задач» М.: МЦНМО, 2022.