

Глава 13

Комбинаторная формула для многочленов Шуберта

В предыдущей главе мы дали определение многочленов Шуберта через операторы разделенных разностей. Несмотря на то, что разности *разделенные*, многочлены Шуберта действительно оказались многочленами, а не алгебраическими дробями. Более того, несмотря на то, что это разделенные *разности*, коэффициенты многочленов Шуберта оказались положительными числами (см. следствие 12.20).

Это очень похоже на ситуацию, которая была с многочленами Шура. Мы определили их как частное двух определителей, и, несмотря на это, они оказались многочленами с целыми положительными коэффициентами. Это следовало из *комбинаторного определения* многочленов Шура: их коэффициенты равнялись числу таблиц Юнга соответствующей формы и веса.

Оказывается, аналогичная комбинаторная формула существует и для многочленов Шуберта. Она была получена Фоминым и Кирилловым [13] и независимо от них Билли и Бержероном [8].

§ 13.1. Пайп-дримы

Определение 13.1. Рассмотрим квадрат $n \times n$ и заполним его элементами двух типов: крестами $+$ и коленами¹ $\swarrow$ таким образом, чтобы все кресты лежали строго выше антидиагонали. Такой объект называется *пайп-дримом* (pipe dream)².

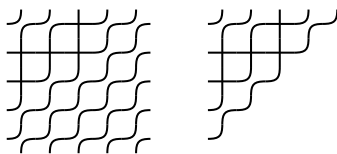


Рис. 13.1. Пайп-дрим с изображенной (слева) и опущенной (справа) частью под диагональю

Поскольку на антидиагонали и ниже нее расположены только колена, то половина пайп-дрима под диагональю оказывается заполнена волнистыми

¹В англоязычных статьях колена $\swarrow$ называются «elbows» (буквально «локти»). Русскоязычного читателя это может немного путать.

²Английское словосочетание «pipe dream» примерно переводится как «несбыточная мечта» или «воздушный замок». А еще «Pipe Dream» — это старая компьютерная игра компании LucasArts, в которой нужно собирать водопроводы из отдельных элементов, в частности, крестов $+$ и колен $\swarrow$. К сожалению, адекватно перевести это название на русский не представляется возможным.

линиями (так называемое «sea of elbows», то есть «море колен»). Эти линии обычно не изображают, чтобы не усложнять рисунок (см. рис. 13.1).

Пайп-дрим можно рассматривать как систему линий — продолжая «водопроводную» терминологию, будем называть их *трубами* — ведущих от левой стороны квадрата к верхней. Пронумеруем входы и выходы этих труб числами от 1 до n сверху вниз и слева направо.

Определение 13.2. Пайп-дрим называется *приведенным*, если никакие две трубы в нем не пересекаются дважды. В дальнейшем мы будем говорить в основном о приведенных пайп-дримах и опускать слово «приведенные» там, где это ясно из контекста.

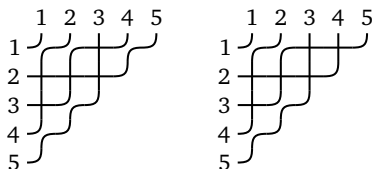


Рис. 13.2. Приведенный (слева) и неприведенный (справа) пайп-дрим

Определение 13.3. Можно воспринимать пайп-дрим как биекцию из множества левых концов труб в множество их верхних концов. Это представление сопоставляет каждому пайп-дриму P перестановку $w(P) \in S_n$, называемую *формой* P . Например, форма левого пайп-дрима P на рис. 13.2 равна $w(P) = \overline{15423}$.

Множество всех приведенных пайп-дримов данной формы $w \in S_n$ обозначим $PD(w)$.

Упражнение 13.4. Изобразите все пайп-дримы формы $\overline{1432}$.

По (не обязательно приведенному) пайп-дриму P можно построить слово Q_P . Для этого будем «читать» пайп-дрим построчно, перебирая строки сверху вниз, а сами строки читая *справа налево*. Для каждого креста в строке i и столбце j будем писать букву s_{i+j-1} , а колена будем просто пропускать. Например, по левому пайп-дриму P на рис. 13.2 получается слово $Q_P = s_3 s_4 s_3 s_2 s_3$.

Упражнение 13.5. Докажите следующие утверждения при помощи диаграмм переплетений.

(а) Q_P является словом для перестановки $w(P)$.

(б) Слово Q_P приведенное тогда и только тогда, когда пайп-дрим P приведенный.

Из этого упражнения следует, что в приведенном пайп-дриме формы w ровно $\ell(w)$ крестов.

Пусть у нас есть какой-то приведенный пайп-дрим. Рассмотрим две трубы, которые пересекаются $\perp$ в какой-то клетке $\boxed{c}$ и проходят без пересечения $\swarrow \searrow$

через какую-то другую клетку $\boxed{e}$. Тогда можно переместить крест из $\boxed{c}$ в $\boxed{e}$, и форма пайп-дрима от этого не изменится.

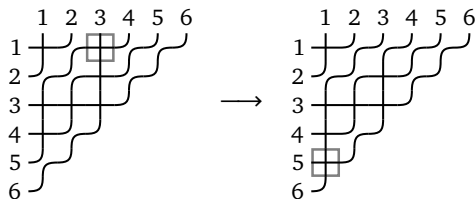


Рис. 13.3. Перемещение креста в пайп-дриме формы $\overline{216543}$

§ 13.2. Теорема Кириллова—Фомина

Многочлены Шура являются суммами мономов по таблицам Юнга данной формы. Оказывается, многочлен Шуберта точно так же можно найти как сумму мономов по приведенным пайп-дримам данной формы.

Сначала опишем, как пайп-дриму сопоставляется моном. Сопоставим кресту в k -й строке пайп-дрима вес x_k . Весом $\mathbf{x}^P$ пайп-дрима P назовем произведение весов всех входящих в него крестов (т. е. степень вхождения x_k в $\mathbf{x}^P$ равна количеству крестов в k -й строке пайп-дрима P).

Теорема 13.6 (Кириллов, Фомин¹). Многочлен Шуберта $\mathfrak{S}_w$ равен сумме мономов $\mathbf{x}^P$ по всем приведенным пайп-дримам формы $w \in S_n$:

$$\mathfrak{S}_w = \sum_{P \in \text{PD}(w)} \mathbf{x}^P.$$

Упражнение 13.7. Проверьте утверждение теоремы для всех $w \in S_3$ и для $1432 \in S_4$.

Чтобы разобраться в доказательстве теоремы Кириллова—Фомина, желательно иметь опыт работы с пайп-дримами. Так что при первом прочтении его можно пропустить и вернуться к нему позднее.

Доказательство. Временно обозначим многочлены Шуберта, определяемые комбинаторно, через $\mathfrak{P}_w$. Зафиксируем числа i и j из формулы перехода Ласку (теорема 12.18): пусть i — последний спуск в перестановке w , а j — максимальное число, для которого $w(j) < w(i)$. Также фиксируем перестановку $w' = w \circ (i \leftrightarrow j)$.

Докажем, что многочлены $\mathfrak{P}_w$ удовлетворяют формуле перехода Ласку:

$$\mathfrak{P}_w = x_i \mathfrak{P}_{w'} + \sum_{\substack{k < i \\ \ell(w' \circ (k \leftrightarrow i)) = \ell(w') + 1}} \mathfrak{P}_{w' \circ (k \leftrightarrow i)}.$$

¹Эта теорема была доказана С. Фоминым и А. Кирилловым [13] и независимо от них Н. Бергероном и С. Билли [8]. В англоязычной литературе принято название «теорема Бержерона—Билли», в русскоязычной — «теорема Кириллова—Фомина».