Занятие 1

Метод вспомогательного треугольника

На этом занятии мы рассмотрим *решение задач на построение треугольников* по их различным элементам, как **основным**, так и **вспомогательным**.

К вспомогательным элементам треугольника чаще всего относятся: медианы, высоты, биссектрисы, периметр, радиусы описанной и вписанной окружностей. Иногда рассматривают также сумму (разность) двух сторон или двух углов.

В большинстве случаев такие задачи решаются **методом вспомогательного треугольника**. Суть данного метода — свести решаемую задачу к уже известной задаче на построение треугольника по основным элементам или к уже решённой задаче на построение треугольника.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Постройте остроугольный равнобедренный треугольник по боковой стороне и проведённой к ней высоте.

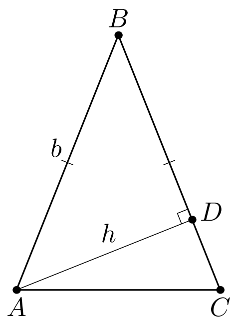

Рис. 1

Решение. Пусть искомый треугольник ABC по заданным стороне b и высоте h уже построен (см. рис. 1). Тогда на нашем чертеже образовался прямоугольный треугольник ABD, у которого заданы катет и гипотенуза. Поэтому задача сводится к построению **вспомогательного прямоугольного треугольника** ABD по катету и гипотенузе и к построению на его основе искомого треугольника (продолжим катет BD так, чтобы длина отрезка BC была равна $b\ldots$).

Обратите внимание на то, что при изложении решения мы говорим только **об алгоритме построения**, складывая его из основного «блока» и дополнительных «кирпичей»!

Отметим, что если не требовать, чтобы искомый треугольник был остроугольным, то задача будет иметь два решения. С нашей точки зрения разбирать этот вопрос сейчас преждевременно.

Рассмотрим более сложную задачу.

Пример 2. Постройте треугольник по двум его углам и периметру.

Отметим ещё раз, что периметр треугольника задан в виде отрезка.

Решение. Пусть искомый треугольник ABC с данным периметром P и углами α и β при вершинах A и B соответственно — построен. «Развернём» его, то есть на прямой AB отложим отрезок AD, равный AC, и отрезок BE, равный BC. Полученные точки D и E соединим с точкой C (см. рис. 2).

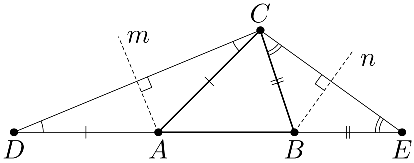

Рис. 2

Заметим, что треугольник ACD — равнобедренный, угол CAB — внешний для этого треугольника, поэтому $\angle CDA = \angle DCA = \frac{\alpha}{2}$. Аналогично $\angle CEB = \angle ECB = \frac{\beta}{2}$.

Таким образом, задача сводится к построению **вспомогательного треугольника** CDE по стороне и двум прилежащим к ней углам ($DE = P$, $\angle CDE = \frac{\alpha}{2}$, $\angle CED = \frac{\beta}{2}$). Для того чтобы теперь получить вершины A и B искомого треугольника, достаточно, например, провести серединные перпендикуляры m и n к отрезкам CD и CE соответственно.

Отличие этой задачи от предыдущей — **вспомогательного треугольника** не было, но мы его создали дополнительным построением.

Отметим, что в подавляющем большинстве случаев, когда задана сумма (или разность) каких-либо отрезков, полезно сделать дополнительное построение, в результате которого заданный отрезок появляется на чертеже. Такой метод иногда называют «спрямлением» (и он применяется не только в задачах на построение).

Подчеркнём ещё раз, что решение задач на построение напоминает строительство домов или игру с детским конструктором: начав с «кирпичиков» (деталей), мы собираем из них «блоки» и уже можем пользоваться ими, не обращая внимания на кирпичи, из которых эти блоки составлены; затем из «блоков» можно собирать более крупные «блоки» («панели»), и ими мы также сможем пользоваться, и т. д.

В рассмотренных примерах таким «блоком» является **построение вспомогательного треугольника**, то есть решение задачи сводится к уже известному нам построению какого-либо треугольника.

Ещё раз обращаем внимание на то, что в приведённых примерах намеренно обсуждался только алгоритм решения. Если подходить формально, то в условиях предложенных задач слово «Постройте ...» надо заменить на словосочетание «Объясните, как построить ...», и мы этого не сделали, только отдавая дань сложившейся традиции.

В заключение отметим, что в любом случае для построения треугольника достаточно задать **три** его элемента, среди которых хотя бы один — **линейный**.

Почему именно **три** элемента? Это связано с наличием признаков равенства треугольников. Действительно, если рассматривать только **основные элементы** треугольника, то наборы из трёх элементов, хотя бы один из которых линейный, либо в точности соответствуют условиям признаков равенства треугольников (три стороны; две стороны и угол между ними; сторона и два прилежащих к ней угла), либо легко сводятся к ним (сторона и два угла, один из которых лежит напротив этой стороны). То есть по таким трём основным элементам треугольник определяется однозначно.

Единственным исключением является такой набор: две стороны и угол, лежащий напротив одной из них. В этом случае могут существовать два треугольника, удовлетворяющих условию задачи.

Действительно, пусть надо построить треугольник ABC, в котором $AB = c$, $BC = a$, $\angle BAC = \alpha$. Тогда, построив угол A, равный α, и отложив на одной из его сторон отрезок AB длины c, проводим окружность с центром B и радиусом a. Эта окружность может не пересечься с другой стороной построенного угла (тогда задача решений не имеет), может касаться этой стороны (одно решение, искомый треугольник прямоугольный), а может пересечь её в двух точках (см. рис. 3). В последнем случае мы получим два треугольника, удовлетворяющих условию задачи: ABC_1 и ABC_2.

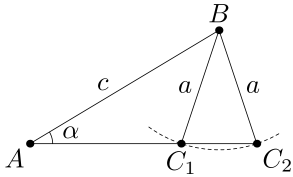

Рис. 3

О том, как именно зависит количество решений задачи от соотношения между заданными величинами, имеет смысл говорить после изучения школьниками метрических теорем для произвольного треугольника (обычно это происходит в 9 классе).

Задачи

Задача 1. Объясните, как построить углы, имеющие величину: а) $45°$; б) $60°$; в) $30°$.

Задача 2. Объясните, как построить равнобедренный треугольник по углу при вершине и биссектрисе, проведённой к боковой стороне.

Задача 3. Объясните, как построить треугольник по следующим данным:

а) стороне и проведённым к ней медиане и высоте;

б) двум углам и высоте (рассмотрите два случая);

в) двум сторонам и медиане (рассмотрите два случая);

г) стороне, прилежащему к ней углу и сумме двух других сторон.

Задача 4. Объясните, как построить прямоугольный треугольник, если даны его острый угол и разность гипотенузы и катета.

Ответы и решения

Обсуждаются только алгоритмы построения, сведённые к крупным «блокам».

1. а) Возможны два способа: построить биссектрису прямого угла или построить равнобедренный прямоугольный треугольник, задав его катет произвольно.

б), в) Возможны два способа: построить равносторонний треугольник с произвольной стороной и биссектрису любого его угла или построить прямоугольный треугольник, у которого гипотенуза в два раза больше катета.

2. Решение сводится к построению вспомогательного треугольника ABL по стороне и двум углам (см. рис. 4; $AL = l$, $\angle ABL = \beta$, $\angle BAL = 45^\circ - \frac{1}{4}\beta$). Искомый треугольник ABC получится, если на луче BL отложить отрезок BC, равный AB.

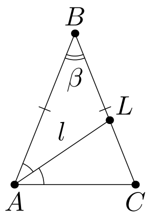

Рис. 4

3. а) Решение сводится к построению вспомогательного прямоугольного треугольника BHM по катету и гипотенузе (см. рис. 5; $BH = h$, $BM = m$). Искомый треугольник ABC получится, если на прямой MH отложить отрезки MC и MA, равные $0,5\,b$.

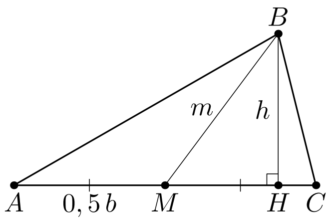

Рис. 5

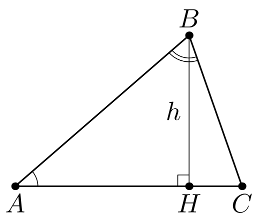

Рис. 6

б) Пусть данная высота искомого треугольника ABC проведена из вершины B. Поскольку по двум углам треугольника третий угол определяется однозначно, то можно считать, что заданы углы BAC, равный α, и ABC, равный β (см. рис. 6). Тогда решение сводится к построению вспомогательного прямоугольного треугольника ABH по катету и острому углу ($BH = h$, $\angle BAH = \alpha$) и откладыванию от луча BA в нужную полуплоскость угла CBA, равного β (точка C — пересечение прямой AH со стороной построенного угла).

При желании можно обратить внимание учащихся на то, что искомый треугольник ABC может получиться не только остроугольным, но также тупоугольным или прямоугольным (в зависимости от величин заданных углов).

в) Пусть в искомом треугольнике ABC заданы стороны $AB = c$ и $BC = a$. Если медиана проведена к одной из данных сторон, например, $AM = m$, то решение сводится к построению вспомогательного треугольника ABM по трём сторонам (см. рис. 7а; $AB = c$, $AM = m$, $BM = 0,5\,a$) и его очевидному достраиванию до искомого треугольника.

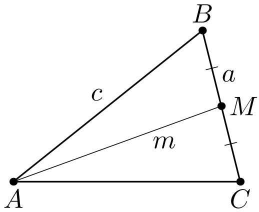

Рис. 7а

Если медиана проведена к третьей стороне, то есть $BM = m$, то для получения вспомогательного треугольника необходимо сделать дополнительное построение: на луче BM отметим точку D так, что $DM = BM$ (см. рис. 7б). Тогда треугольники CBM и ADM равны (по двум сторонам и углу между ними), поэтому $AD = BC = a$. Тем самым решение сведётся к построению вспомогательного треугольника ABD по трём сторонам ($AB = c$, $AD = a$, $BD = 2m$). Разделив отрезок BD пополам, получим точку M, после чего построение искомого треугольника становится очевидным.

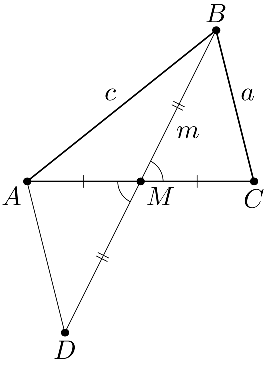

Рис. 7б

г) Пусть в искомом треугольнике ABC: $\angle BAC = \alpha$, $AC = b$, $AB + BC = s$. Тогда, отметив на луче AB точку D так, что $DB = BC$, получим вспомогательный треугольник ACD, который можно построить по двум сторонам и углу между ними (см. рис. 8; $\angle BAC = \alpha$, $AC = b$, $AD = s$). Вершину B искомого треугольника можно получить на отрезке AD, проведя, например, серединный перпендикуляр к отрезку CD, либо отложив от луча CD в нужную полуплоскость угол BCD, равный углу ADC.

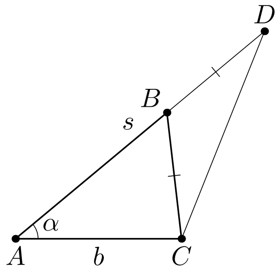

Рис. 8

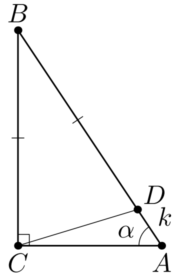

Рис. 9

4. Пусть в искомом треугольнике ABC выполняются соотношения $\angle BCA = 90^\circ$, $\angle BAC = \alpha$, $AB - BC = k$. Тогда, отметив на отрезке AB точку D так, что $BD = BC$, получим, что $AD = k$ (см. рис. 9). Кроме того, $\angle ABC = 90^\circ - \alpha$, поэтому, $\angle BDC = \angle BCD = 45^\circ + \frac{1}{2}\alpha$, тогда $\angle ADC = 135^\circ - \frac{1}{2}\alpha$.

Следовательно, можно построить вспомогательный треугольник ACD по стороне и двум прилежащим углам ($AD = k$, $\angle BAC = \alpha$, $\angle ADC = 135^\circ - \frac{1}{2}\alpha$). Различные способы его достраивания до искомого треугольника очевидны.

Отметим, что если вместо угла BAC задан угол ABC, то задача легко сводится к предыдущей.

К теме данного занятия также относятся задачи 1а–в, е, к, 2а–в, 3а, б, 4, 5, 19д из раздела «Задачи для самостоятельного решения».