Предисловие к третьему изданию

Первые две главы книги сильно переработаны и значительно расширены. Добавлены разделы об элементарных методах интегрирования (о линейных однородных и неоднородных уравнениях первого порядка, об однородных и квазиоднородных уравнениях), о линейных и квазилинейных уравнениях с частными производными первого порядка, об уравнениях, неразрешенных относительно производных, и о теоремах Штурма о нулях линейных уравнений второго порядка. Таким образом, в новое издание книги включены все вопросы действующей программы по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Излагая специальные приемы интегрирования, автор старался всюду выявлять геометрическую сущность разбираемых методов и показывать, как эти методы работают в приложениях, особенно в механике. Так, для решения линейного неоднородного уравнения вводится δ-функция и вычисляется запаздывающая функция Грина, квазиоднородные уравнения приводят к теории подобия и закону всемирного тяготения, а теорема о дифференцируемости решения по начальным условиям — к исследованию относительного движения космических тел на близких орбитах.

Автор позволил себе включить в это предисловие несколько исторических отступлений. Дифференциальные уравнения изобретены Ньютоном (1642—1727). Ньютон считал это свое изобретение настолько важным, что зашифровал его в виде анаграммы, смысл которой в современных терминах можно вольно передать так: «Законы природы выражаются дифференциальными уравнениями».

Основным аналитическим достижением Ньютона было разложение всевозможных функций в степенные ряды (смысл второй, длинной анаграммы Ньютона в том, что для решения любого уравнения нужно подставить в уравнение ряд и приравнять члены одинаковой степени). Особенное значение имела здесь открытая им формула бинома Ньютона (разумеется, не только с целыми показателями, для которых формулу знал, например, Виет (1540—1603), но и, что особенно важно, с дробными и отрицательными показателями). Ньютон разложил в «ряды Тейлора» все основные элементарные функции (рациональные, радикалы, тригонометрические, экспоненту и логарифм). Это, вместе с составленной им таблицей первообразных (которая перешла в почти неизменном виде в современные учебники анализа), позволяло ему, по его словам, сравнивать площади любых фигур «за половину четверти часа».

Ньютон указывал, что коэффициенты его рядов пропорциональны последовательным производным функции, но не останавливался на этом подробно, так как он справедливо считал, что все вычисления в анализе удобнее производить не при помощи кратных дифференцирований, а путем вычисления первых членов ряда. Для Ньютона связь между коэффициентами ряда и производными была скорее средством вычисления производных, чем средством составления ряда.

Одним из важнейших достижений Ньютона является его теория Солнечной системы, изложенная в «Математических началах натуральной философии» («Principia») без помощи математического анализа. Обычно полагают, что Ньютон открыл при помощи своего анализа закон всемирного тяготения. В действительности Ньютону (1680) принадлежит лишь доказательство эллиптичности орбит в поле притяжения по закону обратных квадратов: сам этот закон был указан Ньютону Гуком (1635—1703) (см. § 8) и, по-видимому, угадывался еще несколькими учеными.

С «Principia» Ньютона начинается современная физика. Завершение формирования анализа как самостоятельной научной дисциплины связано с именем Лейбница (1646—1716). Огромной заслугой Лейбница является также широкая пропаганда анализа (первая публикация — статья 1684 г.) и доведение его алгоритмов[*)] до полного автоматизма: он изобрел таким образом способ научить пользоваться анализом (и преподавать его) людей, вовсе его не понимающих, — тенденция, с которой приходится бороться еще и сегодня.

Из огромного числа работ XVIII века по дифференциальным уравнениям выделяются работы Эйлера (1707—1783) и Лагранжа (1736—1813). В этих работах была прежде всего развита теория малых колебаний, а следовательно — теория линейных систем дифференциальных уравнений; попутно возникли основные понятия линейной

[*)] Между прочим, Лейбницу принадлежат понятие матрицы, обозначение a_{ij}, а также начала теории определителей и теории систем линейных уравнений, одна из первых вычислительных машин.

алгебры (собственные числа и векторы в n-мерном случае). Характеристическое уравнение линейного оператора долго называли секулярным, так как именно из такого уравнения определяются секулярные (вековые, т. е. медленные по сравнению с годовым движением) возмущения планетных орбит согласно теории малых колебаний Лагранжа. Вслед за Ньютоном Лаплас и Лагранж, а позже Гаусс (1777—1855) развивают также методы теории возмущений.

Когда была доказана неразрешимость алгебраических уравнений в радикалах, Лиувилль (1809—1882) построил аналогичную теорию для дифференциальных уравнений, установив невозможность решения ряда уравнений (в том числе таких классических, как линейные уравнения второго порядка) в элементарных функциях и квадратурах. Позже С. Ли (1842—1899), анализируя вопрос об интегрировании уравнений в квадратурах, пришел к необходимости подробно исследовать группы диффеоморфизмов (получившие впоследствии имя групп Ли) — так из теории дифференциальных уравнений возникла одна из наиболее плодотворных областей современной математики, дальнейшее развитие которой было тесно связано совсем с другими вопросами (алгебры Ли еще раньше рассматривали Пуассон (1781—1840) и, особенно, Якоби (1804—1851)).

Новый этап развития теории дифференциальных уравнений начинается с работ Пуанкаре (1854—1912), созданная им «качественная теория дифференциальных уравнений» вместе с теорией функций комплексных переменных привела к основанию современной топологии. Качественная теория дифференциальных уравнений, или, как теперь ее чаще называют, теория динамических систем, является сейчас наиболее активно развивающейся и имеющей наиболее важные приложения в естествознании областью теории дифференциальных уравнений. Начиная с классических работ А. М. Ляпунова (1857—1918) по теории устойчивости движения в развитии этой области большое участие принимают русские математики (упомяну работы А. А. Андронова (1901—1952) по теории бифуркаций, А. А. Андронова и Л. С. Понтрягина по структурной устойчивости, Н. М. Крылова (1879—1955) и Н. Н. Боголюбова по теории усреднения, А. Н. Колмогорова по теории возмущений условно-периодических движений). Разбор современных достижений, конечно, выходит за рамки настоящей книги (с некоторыми из них можно познакомиться, например, по книгам автора «Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений», М., 1978;

«Математические методы классической механики», М., 1974; «Теория катастроф», М., 1981).

Автор благодарен всем читателям предыдущих изданий, сообщившим свои замечания, которые автор постарался учесть при переработке книги, а также Д. В. Аносову, многочисленные замечания которого способствовали улучшению настоящего издания.

1984 г. *В. И. Арнольд*

Предисловие к первому изданию

При отборе материала для этой книги автор стремился ограничиться строго необходимым минимумом. Центральное место в курсе занимают два круга вопросов: теорема о выпрямлении векторного поля (эквивалентная обычным теоремам существования, единственности и дифференцируемости решений) и теория однопараметрических групп линейных преобразований (т. е. теория линейных автономных систем). Автор позволил себе не касаться ряда более специальных вопросов, обычно включаемых в курсы обыкновенных дифференциальных уравнений (элементарные приемы интегрирования; уравнения, не разрешенные относительно производной; особые решения; теория Штурма—Лиувилля; уравнения с частными производными первого порядка). Часть из этих вопросов удобнее разобрать на упражнениях; последние же две темы естественнее относить к курсам уравнений с частными производными или вариационного исчисления.

Более подробно, чем это обычно принято, разбираются приложения обыкновенных дифференциальных уравнений к механике. Уравнение маятника появляется на одной из первых страниц; в дальнейшем эффективность вводимых понятий и методов каждый раз проверяется на этом примере. Так, в параграфе о первых интегралах появляется закон сохранения энергии, из теоремы о дифференцировании по параметру извлекается «метод малого параметра», а теория линейных уравнений с периодическими коэффициентами естественно приводит к исследованию качелей («параметрический резонанс»).

Изложение многих вопросов в курсе сильно отличается от традиционного. Автор стремился всюду выявить геометрическую, качественную сторону изучаемых явлений. В соответствии с этим в книге много чертежей и нет ни одной сколько-нибудь сложной формулы. Зато появляется целый ряд фундаментальных понятий, которые при традиционном, координатном изложении остаются в тени (фазовое пространство и фазовые потоки, гладкие многообразия и расслоения, векторные поля и однопараметрические группы диффеоморфизмов). Курс значительно сократился бы, если бы можно было предполагать эти понятия известными. К сожалению, в настоящее время указанные вопросы не включаются ни в курсы анализа, ни в курсы геометрии. Поэтому автору пришлось излагать их достаточно подробно, не предполагая у читателя никаких предварительных знаний, выходящих за рамки стандартных элементарных курсов анализа и линейной алгебры.

Основу настоящей книги составил годовой курс лекций, которые автор читал студентам-математикам второго курса Московского университета в 1968—1970 гг.

При подготовке лекций к печати большую помощь оказал Р. И. Богданов. Автор благодарен ему и всем слушателям и коллегам, сообщившим свои замечания о ротапринтном тексте лекций (МГУ, 1969). Автор благодарен рецензентам Д. В. Аносову и С. Г. Крейну за внимательное рецензирование рукописи.

1971 г. *В. И. Арнольд*