С. Г. Гиндикин

Об Израиле Моисеевиче Гельфанде и его интегральной геометрии

Я хочу рассказать о моём учителе, одном из самых замечательных математиков XX века Израиле Моисеевиче Гельфанде. Он родился 2 сентября 1913 г. в местечке Окны (ныне Одесская область Украины). Впрочем, на моей памяти фигурировали и несколько другие даты (И. М. шутил, что у него был не день рождения, а неделя рождения; такая путаница была типична для людей, родившихся до революции). Он умер 5 октября 2009 г. в США, где провёл последние 20 лет жизни, работая в университете Ратгерс. Всё это время я также работал в этом университете.

Когда я вспоминаю И. М., мне кажутся замечательными не только его выдающиеся открытия, но и его удивительная неповторимая способность угадывать совершенно новую невиданную математику. Вспоминаю, как на заседании Московского математического общества отмечали 70-летие И. М. Гельфанда и В. И. Арнольд, который, несомненно, испытал сильное влияние И. М., вспоминал, что только после их встречи он осознал, что в математике не менее важно, чем решение трудных известных задач, открытие новых горизонтов.

Кстати, об И. М. иногда говорили, что он не доказал по-настоящему трудных теорем. И. М. знал об этом и понимал природу этого мнения: у него были очень трудные результаты, и всё же чемпионом по «пробиванию» трудностей он не был. Он сознательно сделал выбор в пользу более концептуальной работы, и всё же небольшое чувство дискомфорта у него сохранялось. На том же заседании, после реплики Арнольда, когда другие математики рассказывали о достижениях И. М., он несколько раз прерывал докладчиков, обращаясь к Арнольду: «Дима, а это трудная теорема!»

Некоторое время назад на сайте `polit.ru` появилось подробное интервью С. П. Новикова, где он также отмечает сильное влияние

Статья подготовлена на основе главы в книге: *Гиндикин С. Г.* Рассказы о физиках и математиках. М.: МЦНМО, 2018.

на него И. М.: «Гельфанд оказал на меня большое воздействие. Я познакомился с ним в 25 лет, когда уже был состоявшимся учёным, но он во многом мне помог идейно. Он — выдающийся, глубокий человек...» И в другом месте: «Безусловно, есть люди, которые „пробивают“ решение трудной задачи, Абель — самый знаменитый. Потом талантливые люди смотрят, что здесь создано, и дальше развивают и создают много полезного для других людей. Кстати, в части второго рода лучше всех нас видел, что из ваших идей будет востребовано широким обществом, замечательный математик Израиль Моисеевич Гельфанд, хотя это не исчерпывает его творческого вклада».

Я знал И. М. 55 лет, и мне посчастливилось работать вместе с ним. Никакие общие слова не могут передать впечатление от его неповторимого стиля. Поэтому я решил рассказать здесь об одном замечательном проекте Гельфанда, в котором мне довелось участвовать, — об интегральной геометрии. Я уверен, что она хорошо передаёт ни на что не похожую природу гельфандовской математики.

1. Путь в математику

Я хочу предварить свой рассказ небольшими биографическими сведениями. И. М. прожил долгую жизнь. При этом удивительно продолжительной была его математическая жизнь: в 16 лет он уже, несомненно, профессионально занимался математикой, а в 96 лет он ещё мог поддерживать профессиональный математический разговор. Я не знаю другого примера математической жизни, продолжавшейся 80 лет. И у этой жизни было замечательное начало, о котором я скажу несколько слов. На склоне лет великие люди нередко любят вспоминать о своём пути в науку. В 1988 г. на фоне усилившихся международных научных связей удалось подготовить и издать на Западе сборник статей в честь 75-летия И. М., в котором приняли участие крупнейшие математики и физики. И. Зингер из США и я были его составителями. Не рассчитывая на согласие, я всё же спросил И. М., не согласится ли он рассказать о своих первых шагах в математике. Неожиданно он согласился, и я услышал поразивший меня рассказ, некоторые моменты которого я хочу воспроизвести здесь.

Семья жила в маленьком местечке, где была лишь одна школа. К 12 годам у И. М. развивается неодолимая страсть к математике. Я вспоминаю слова А. Н. Колмогорова, который в этом же возрасте серьёзно увлёкся математикой, что это естественный возраст для начала математической жизни. Источник этой страсти трудно обнаружить: не было никого кругом, кто мог бы её инициировать и поддерживать. Про такое говорят «зов свыше». И. М. с теплотой вспоминал своего доброго учителя математики («с запорожскими усами»), постоянно находившегося под воздействием алкоголя, который почувствовал необычайный дар в мальчике и, здраво понимая, что он не может управлять его развитием, лишь благожелательно поощрял его, не вмешиваясь. Большим подспорьем был прекрасный учебник геометрии Киселёва, содержащий большое количество задач, в том числе трудных. Других книг не было, за исключением учебника по дифференциальному исчислению для технических школ, который И. М. уговорил родителей купить в благодарность за терпение при удалении гланд. И. М. помнил, что это был учебник Беляева на украинском языке. Он помнил также, что книга начиналась с объяснения, что бывают три типа функций: аналитические (задаваемые формулами), эмпирические (задаваемые таблицами) и корреляционные (без объяснений). Прошло много лет, прежде чем И. М. узнал определение последних. Второй том должен был быть посвящён интегральному исчислению, но об этой загадочной теории И. М. удалось узнать много позднее. Практически никаких источников математического знания не было доступно. На короткое время появился студент близлежащего учительского института, но многого от него узнать не удалось. Интересно, что в том же классе ещё один ученик, Давид Мильман, серьёзно интересовался математикой и впоследствии стал известным математиком. Между ними наверняка было соперничество. Из одного разговора с И. М. (когда ему было за 90!) я догадываюсь, что в классе у Мильмана рейтинг был выше и об этом соперничестве И. М. не забыл (впрочем, ему казалось, что учитель понимал его превосходство).

И. М. говорил, что эти 5 лет до его отъезда в Москву в 1929 году в возрасте 16 лет полностью определили его «способ делать математику», его «художественный образ» этого предмета. Наиболее удивительным в этой истории было то, что И. М. не просто увлекался решением трудных задач, что типично для сильных ребят в этом возрасте, но пытался реконструировать манившую его таинственную Математику по немногим доступным ему фактам. В чём природа этого таинственного зова — остаётся загадкой. Его подход к решению задач: их выбор, анализ, обнаружение малозаметных связей — уже тогда формирует неповторимый стиль, который позднее сделал его великим математиком. Рано формируются вкусы (не каждая задача ему интересна!); он культивирует чувство математической красоты, которая играет для него более важную роль, чем трудность задачи. Существование «двух математик» — алгебры и геометрии — вызывает у него чувство неудовлетворённости. Только узнав о бесконечных рядах, пленивших его воображение, он обнаружил единство математики, которого ему так недоставало. (Можно вспомнить, как был увлечён рядами юный Рамануджан.) Главным было то, что функции геометрического происхождения, например тригонометрические, допускают аналитические представления в виде рядов. Гармония математики была восстановлена, и ощущение её единства стало главным для всей математической жизни И. М. Гельфанда. «Единство математики» было названием конференции в честь его 90-летия.

Пятилетний период «чистого эксперимента» закончился в 1929 году, когда И. М., не достигнув 17 лет, без родителей уезжает в Москву, где поселяется у дальних родственников. Это был «год великого перелома», когда многие люди бежали в крупные города, спасаясь от голода, безработицы, произвола местных властей. Попытки найти регулярную работу были безуспешны, зато оставляли ему много времени для регулярных визитов в Ленинскую библиотеку с неограниченным доступом к книгам по математике. И. М. вспоминал про 45-минутные прогулки от Покровки, где жили его родственники, до библиотеки (на трамвай денег не хватало!), первые знакомства со студентами-математиками, «роскошь» библиотечного буфета, где за 15 копеек можно было получить винегрет с хлебом и чай. Краток был счастливый момент, когда И. М. получил работу контролёра в библиотеке. Однако вскоре непосредственный начальник уволил его, как выражался сам И. М., за «нефотогеничную внешность», намекая на один из первых эпизодов антисемитизма, с которым И. М. ещё много раз пришлось столкнуться.

Одновременно И. М. был вынужден внести существенные коррективы в свои представления о математике: поток ранее недоступной информации нарушил условия «чистого эксперимента». Ему трудно сориентироваться в неожиданно расширившемся мире математики, найти свой особый путь в этом мире. Перед приездом в Москву он пришёл к выводу, что естественный класс функций — это функции, представимые сходящимися рядами. Он уже тогда пытался вести научную деятельность и доказал, что чётная функция вещественного переменного, рассматриваемая как функция комплексного переменного, принимает только вещественные значения на мнимой оси (как $\cos ix$). В Москве он обнаруживает, что математики интересуются (отчасти под влиянием школы Н. Н. Лузина) очень общими функциями вещественного переменного. У И. М. душа не лежит к возможным «патологиям» функций, но он честно проходит классический образовательный цикл, штудируя прекрасный учебник Валле-Пуссена. Однако чувство гармонии вернулось к нему, только когда в его руки попал учебник И. И. Привалова по теории аналитических функций комплексного переменного: он обнаружил, что изучение класса «хороших» функций, близкого к тому, который он рассматривал сам, имеет право на жизнь. Опять-таки производит впечатление очень ясная система предпочтений.

К 18 годам И. М. почувствовал себя в силе начать преподавательскую деятельность. Неожиданно оказалось, что обстановка в Москве в 1931 г. располагает к этому. Страна стремилась быстро создать новые научные и технические кадры из рядов рабочих. Стремление решить эту задачу с нереальной скоростью приводило к созданию зачастую фантастических методов обучения и к возникновению огромного количества новых учебных заведений, для которых не хватало профессиональных преподавателей. Их заменяли непрофессиональными консультантами. И. М. занимает такую позицию в Высшей технической школе Бубнова, а затем в Вечернем химико-технологическом институте, где одновременно занималось более 30 групп «бригадно-лабораторным» методом (бригада вместе готовила материал, и один человек сдавал его от имени всей группы). И. М. работал запасным инструктором и фактически был занят каждый день. Ему очень нравилась эта работа, но он не научился нравиться начальству и работу вскоре потерял. Однако, может быть, именно в это время у него появился интерес к преподаванию математики, который сохранится у него на всю жизнь.

В конце 1931 г. И. М. становится завсегдатаем семинаров в Московском университете; он знакомится с талантливыми молодыми математиками (среди них — М. В. Келдыш, А. И. Мальцев). В 1932 г. он поступает в аспирантуру, не имея не только высшего, но и среднего образования (трудно вообразить такое сегодня!). С этого момента начинается его более регулярная математическая жизнь, о которой неоднократно писалось. Я хочу заметить, что как основное направление своей математической деятельности он выбрал функциональный анализ — относительно новое (не модное!) направление в математике — и работы И. М. (нормированные кольца, представления групп, обратные задачи и т. д.) в значительной мере определили судьбу этой области математики, связанной с бесконечномерной геометрией и её аналитическими применениями. Известно несколько его замечательных докладов, в которых в разные годы формулировались основные задачи функционального анализа. Он постоянно расширял и менял содержание предмета. Когда в 1993 году мы выбирали название для конференции в честь 80-летия И. М. (первой в его честь в США), наиболее подходящим показалось название «Функциональный анализ на рубеже XX столетия».

Много лет И. М. занимался прикладной и вычислительной математикой. Он профессионально работал в клеточной биологии и физиологии, причём не как математик, а как биолог, активно обсуждающий все стадии экспериментальной работы. Биологический семинар И. М. Гельфанда привлекал лучших биологов Москвы. Я участвовал в его работах по медицинской диагностике и помню, что он настаивал, что математик должен привнести в эту работу не столько математические методы, сколько здравый смысл и умение организовывать материал, натренированные в результате занятий математикой. Я уже упоминал интерес И. М. к вопросам преподавания математики. Он был одним из организаторов математических олимпиад в Москве, основал Заочную математическую школу, написал несколько учебников по разным разделам математики и ряд популярных книг. И. М. создал журнал «Функциональный анализ и его приложения», ставший одним из самых авторитетных математических журналов в мире.

2. Семинар Гельфанда по функциональному анализу

Семинар И. М. Гельфанда начал работать в 1943 г. Он проходил в Москве до отъезда И. М. в США в 1990 г. Продолжение семинара происходило в университете Ратгерс, где И. М. провёл последние 20 лет своей жизни. Семинар был всегда важнейшим событием очень богатой математической жизни Москвы. Не будет преувеличением сказать, что большинство известных московских математиков в какой-то период своей математической жизни были его участниками. Математики из других городов пользовались каждой возможностью посетить семинар. Помню, как группа ленинградских студентов во главе с Мишей Громовым приезжала в Москву из Ленинграда каждый понедельник (день семинара, в который обычно и другие связанные семинары устраивались), а затем они пересказывали другим услышанное. В Москве было несколько отличных и очень популярных семинаров, но семинар Гельфанда занимал особое место. Многие годы перед семинаром И. М. читал разные курсы или вёл специальные семинары. Я помню его курс по теории представлений в середине 60-х (это был последний курс, который он читал), а также семинар по теории Тейхмюллера.

Постепенно семинар стал и международной достопримечательностью: нечастые визитёры обычно включали его посещение в своё расписание. Многие из них оказывались не готовы к нестандартной манере ведения семинара, особенно если им довелось быть докладчиками (Халмош оставил очень эмоциональное описание своих впечатлений). И. М. постоянно менял структуру семинара: он начинался как студенческий семинар, потом он ориентировался больше на аспирантов и сложившихся математиков, а потом опять студенты стали его существенной частью (И. М. шутил, что это семинар «для студентов и наиболее продвинутых профессоров»), а с первыми математическими школами в Москве на семинаре появились и школьники.

Я хочу подчеркнуть, что, с другой стороны, семинар был очень важен для собственной математической жизни И. М. Многие из нас были свидетелями, как сильно его деятельность была сфокусирована на семинаре. Он задолго до понедельника начинал думать о предстоящем семинаре, часто приглашал домой потенциального докладчика, хотя решающим моментом оставался экспромт. Отсутствие И. М. на семинаре, даже в случае болезни, было экстраординарным событием. Хотя такие семинары случались, они были безнадёжно провальными. Когда в начале 1950-х, в пик антисемитизма, И. М. был уволен из Московского университета (он вспоминал о появлении перед этим на семинаре незнакомых лиц с «безошибочно чекистской» внешностью), ему пришлось предпринять огромные усилия, чтобы получить разрешение продолжить работу семинара.

Нельзя не упомянуть, что отношение к семинару было далеко не однозначным. Критика обычно касалась его стиля, который был очень необычен для научного семинара. Он был похож на театр с уникальным режиссёром, одновременно играющим главную роль в представлении и организующим поддерживающих актёров, многие из которых имели высочайшую квалификацию. Я пользуюсь этой метафорой совершенно серьёзно, не пытаясь уподобить семинар спектаклю. И. М. сознательно выбрал наиболее трудный и опасный жанр: демонстрировать на публике, как он понимает математику. Это был открытый урок восприятия математики одним из наиболее удивительных математиков нашего времени. Такая роль могла исполняться только в максимально благоприятных условиях: жанр диктовал правила игры, которые не всегда были удобны для слушателей. Это означало, например, что лидер всегда следовал своей интуиции в окончательном выборе тем докладов, он свободно перебивал докладчиков комментариями и вопросами (привилегия, не позволенная другим участникам), он организовывал «понимание», прежде всего младшими участниками (фрагменты докладов повторялись, участники вызывались к доске). Всё это происходило с невероятной щедростью, истинной страстью к математике. Несомненно, на его стиль повлиял стиль семинара Л. Д. Ландау по теоретической физике.

Вспомним некоторые постановочные трюки. Е. Б. Дынкин, который был на семинаре в его первые годы, когда участников было мало, вспоминал, что поначалу пришедшие на семинар официально именовались «мебелью» и только проявив свои возможности, они торжественно посвящались в «члены» семинара. И. М. заботился о том, как сидят участники, резервируя передние места для студентов, не стесняясь просить уважаемых участников освободить «студенческие» места (позднее он резервировал несколько передних мест для таких особенно заслуженных участников, как М. А. Наймарк, Г. Е. Шилов, М. И. Вишик). Важную роль играли всякого рода импровизации. Процесс семинара мог драматически измениться в любой момент (например, мог смениться докладчик!). Другая возможная мизансцена включала игру в «стандартного» слушателя, в которой один из участников (это мог быть в равной степени студент или уважаемый профессор) был проинструктирован внимательно слушать и информировать руководителя, если он что-то не понял. Соответствующее место повторялось, пока понимание не было достигнуто. «Стандартный» слушатель должен был быть готов к проверке, насколько «ответственно» он понимает. Высококвалифицированный «стандартный» слушатель чувствовал, когда И. М. хотел повторения. Временами И. М. упорно настаивал, что он чего-то не понимает, в ситуации, когда все кругом были уверены, что всё ясно. Нередко (но не всегда!) нечто неожиданное открывалось слушателям, а иногда и докладчику. И. М. любил повторять старую историю о профессоре, жалующемся на студентов: «Фантастически глупые студенты — пять раз повторил доказательство, уже и сам его понял, а они всё ещё не понимают!»

Для меня остаётся загадкой, как И. М. мог выдерживать это физическое напряжение на протяжении многих часов. Формально семинар начинался в 6 часов, но фактически он начинался по крайней мере с часовым опозданием. И. М. психологически было невероятно трудно прийти куда-нибудь вовремя. Помню, как с огромным трудом он добрался (точнее, его доставили!) к назначенному времени на встречу с президентом Академии наук СССР М. В. Келдышем, но он всё же опоздал, остановившись обменяться парой слов с кем-то из персонала (он обожал такие случайные разговоры). Надо сказать, что в США он понял, что там невозможно прожить с этой привычкой, и заметно исправился. Так или иначе, свободные беседы между участниками были существенной частью сценария. В немногих случаях, когда семинар начинался раньше, поток опоздавших не прекращался, и И. М., любивший театральные моменты и обычно нервно реагировавший на опоздания, демонстративно извинялся перед каждым вошедшим за раннее начало.

Семинар продолжался без перерыва до десяти или половины одиннадцатого вечера (я слышал, что в первые годы существования он кончался ещё позднее). Конец семинара был в постоянном конфликте с правилами МГУ. Обычно к 10 часам уборщица начинала заглядывать в дверь, намекая, что пора освободить аудиторию и дать ей возможность делать её работу, а потом и требуя этого. В конечном счёте она одерживала победу. Около И. М. собиралось заметное количество людей, желавших поговорить с ним. Многим он сам назначил встречу, не заботясь о реалистичной оценке их числа. К тому времени лифт уже был отключён и нужно было найти лестницу, по которой можно было спуститься с 14-го этажа — никогда не будучи уверенным, что дверь на первом этаже не будет закрыта и не придётся возвращаться назад и искать другую дверь (где, кроме России, так любят закрывать двери!). Следующая проблема была в том, чтобы найти единственный открытый выход из здания. Несколько человек провожали И. М. пешком до его дома. Последние математические разговоры при входе в дом завершали семинарский ритуал. Последняя задача (разного уровня сложности для разных участников) была добраться до дома на городском транспорте, который к этому времени постепенно прекращал работу. Ночная Москва ещё была относительно безопасна, и жизнь казалась удивительно прекрасной!

Семинар Гельфанда оказал огромное влияние на многих математиков, не только на его прямых учеников. Семинар был для нас уникальной возможностью не только узнавать новые вещи, но и наблюдать неформальное понимание математики Израилем Моисеевичем, учиться обычно спрятанным загадкам великого мастерства.

3. Интегральная геометрия

Мне кажется, что интегральная геометрия прекрасно иллюстрирует присущий Израилю Моисеевичу Гельфанду неповторимый способ открывать новую математику. Вся история интегральной геометрии в жизни И. М. Гельфанда разворачивалась перед моими глазами. Мне посчастливилось сотрудничать с ним и с М. И. Граевым (с которым они вместе начинали интегральную геометрию) в некоторые ключевые моменты. В 1998 г. И. М. Гельфанд, М. И. Граев и я получили Государственную премию России за работы по интегральной геометрии. Я хочу вспомнить здесь о том, что представляется мне главным в этом проекте.

Первая презентация. Я хорошо помню это заседание семинара Е. Б. Дынкина по группам Ли, проходившее, по-видимому, весной 1959 г. Семинар, поначалу только студенческий, в этот момент уже объединял как студентов (А. Кириллов, Э. Винберг, я), так и известных математиков (Ф. И. Карпелевич, Ф. А. Березин, И. И. Пятецкий-Шапиро). На заседании неожиданно (как обычно, с опозданием) появился И. М. Гельфанд в сопровождении М. И. Граева и с огромным энтузиазмом начал рассказывать об их новой работе. Это была первая презентация интегральной геометрии. Может показаться странным, почему Гельфанд не сделал этого на своём семинаре (в действительности он почти никогда не рассказывал там о своих новых результатах) и почему он выбрал для этой цели студенческий по преимуществу семинар. Несомненно, это не было случайным, поскольку И. М. Гельфанд всегда был очень точен в выборе адресатов, и это хорошо вписывалось в традиции московской математической жизни. Вспоминаются не столько конкретные детали доклада, сколько очевидное для слушателей волнение Гельфанда и его уверенность, что перед ним открылось нечто очень значительное — новое направление геометрического анализа, которое он предложил называть «интегральная геометрия», поскольку по важности оно может быть сопоставимо только с дифференциальной геометрией. Он упомянул, что этим термином пользовался Бляшке для некоторого круга задач, связанных с вычислением геометрических мер, но эта узкая область не заслуживает столь амбициозного названия, а потому он считает оправданным пользоваться этим термином для новой области. Спорность этой позиции очевидна. Но такие вещи мало волновали И. М. Гельфанда, и я не берусь эту позицию оценивать. Мне кажется это важным для понимания его эмоционального настроя. Он напомнил, что часто повторял, что «теория представлений — это вся математика» (разумеется, я слышал это много раз, а Ю. И. Манин вспоминал на юбилее Гельфанда, что он также слышал, что «вся математика — это теория представлений», отметив деликатное различие этих афоризмов). Отныне, сказал Гельфанд, он считает, что «интегральная геометрия — это вся математика».

Теперь о математической мотивации Гельфанда. Он считал основной задачей теории представлений получение «формул Планшереля» — разложение на неприводимые некоторых приводимых представлений, в первую очередь регулярных представлений на однородных пространствах. Класс групп и однородных пространств сознательно оставлялся неуточненным. Ясно лишь, что и сами комплексные полупростые группы Ли, и их однородные пространства для максимальной компактной и картановской подгрупп входят в этот класс. Первые два пространства являются симметрическими, а третье — нет. Принципиально, что рассматриваются не только симметрические пространства. Последнее пространство связано с разложением кронекеровских произведений неприводимых представлений, которое тогда лишь недавно было получено М. А. Наймарком для группы Лоренца. С самого начала разложение на неприводимые интерпретируется как некоммутативный аналог интеграла Фурье: в условиях непрерывного простого спектра мы можем говорить о «проекции» функций на однородном пространстве на неприводимые представления. Обычное преобразование Фурье имеет геометрический двойник в виде преобразования Радона — интегрирования по гиперплоскостям; они связаны друг с другом одномерным преобразованием Фурье. Замечательное открытие Гельфанда и Граева состояло в том, что и в случае полупростых групп Ли имеется аналогичный геометрический двойник: на однородных пространствах рассматриваются орисферы — все орбиты максимальных унипотентных подгрупп — и орисферическое преобразование — оператор интегрирования по орисферам. Обобщённое преобразование Фурье и орисферическое преобразование связаны обычным (коммутативным) преобразованием Меллина или, что эквивалентно, преобразованием Фурье. Поэтому задачи о формуле Планшереля и об обращении орисферического преобразования на однородном пространстве тривиально сводятся одна к другой. Орисферы в гиперболической геометрии были высоко ценимы ещё её создателями: это сферы бесконечного радиуса с центрами на бесконечности, и они отличаются от гиперболических гиперплоскостей. Для однородных (в первую очередь симметрических) пространств они оставались прежде незамеченными.

Задним числом идея орисферического преобразования кажется необычайно естественной. Пусть G, N, B, C — комплексная полупростая группа Ли, её максимальная нильпотентная, борелевская и картановская подгруппы соответственно. Тогда многообразие орисфер — это $\mathrm{Hor} = G/N$. Гельфанд и Граев называют его «основным аффинным пространством». На нем наряду с правым действием группы G действует левыми сдвигами коммутативная группа C (нормализатор для N), коммутируя с правыми сдвигами. Разложение регулярного представления на Hor даёт в точности неприводимые представления группы G на флаговом многообразии $F = G/B$ («основное проективное пространство» по терминологии Гельфанда и Граева). Это лишь перефразировка обычной реализации конечномерных неприводимых представлений. Поэтому если орисферическое преобразование (сплетающий оператор) инъективно, то разложение регулярного представления сводится к разложению по левому действию C на пространстве орисфер (упомянутое выше преобразование Меллина).

Предыстория. Разумеется, реальный путь к открытию был совершенно другим. Я был счастлив услышать о нём от Гельфанда и хочу передать здесь его рассказ. В 1947 г. появились три статьи — Баргмана, Гельфанда — Наймарка и Хариш-Чандры, — в которых были найдены унитарные представления группы Лоренца. Мне кажется, что я слышал от Гельфанда наблюдение, что существенные вещи в математике обычно независимо открываются в трёх местах (история математики действительно доставляет выразительные примеры, начиная с неевклидовой геометрии). Группа Лоренца локально изоморфна группе $\mathrm{SL}(2;\mathbb{C})$. Неудивительно, что инициатива в этой задаче принадлежала физикам и авторы были нацелены на физические применения (Баргман решал проблему Паули и обсуждал её с Вигнером и фон Нейманом, Хариш-Чандре задачу предложил Дирак, первая публикация Гельфанда и Наймарка была в физическом журнале.) Поскольку представления группы вращений играют исключительную роль в нерелятивистской квантовой механике, было естественно ожидать, что представления группы Лоренца должны играть аналогичную роль в релятивистском случае. Трудность заключалась в том, что группа вращений компактна и все её неприводимые унитарные представления конечномерны, а группа Лоренца некомпактна и не имеет конечномерных унитарных представлений, отличных от единичного (именно унитарные представления представляют интерес для физики). В 1930-е годы Дирак и Вигнер рассматривают некоторые бесконечномерные унитарные представления группы Лоренца. С другой стороны, И. М. Гельфанд и Д. А. Райков строят аналог теории Петера — Вейля для локально компактных групп, пользуясь бесконечномерными унитарными представлениями. По-видимому, в тот момент все полагали, что задача описания всех унитарных представлений группы Лоренца вряд ли имеет обозримый ответ, поскольку этот гипотетический ответ должен включать сложные рассмотрения факторов фон Неймана. Несомненно, наиболее удивительным для авторов было то, как просто и явно описываются все неприводимые унитарные представления группы Лоренца.

Несколько сравнительных замечаний: Баргман рассмотрел также представления «вещественной» группы Лоренца $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ и обнаружил представления дискретной серии, реализующиеся в голоморфных функциях в диске. Центральный момент заключался в установлении полноты найденной системы унитарных представлений. Баргман и Хариш-Чандра доказывают лишь инфинитезимальную версию полноты. Баргман доказывает также некоторое свойство полноты матричных элементов. В то же время Гельфанд и Наймарк идут намного дальше, определяя практически все основные концепции теории унитарных представлений. Они определяют характеры неприводимых унитарных представлений как распределения, показывают, что представления определяются характерами с точностью до эквивалентности, и явно вычисляют их на регулярных элементах, в результате чего получаются точные аналоги классических формул Г. Вейля. Работа содержала сложное аналитическое доказательство того, что перечислены все неприводимые унитарные представления, однако главным в ней был аналог формулы Планшереля — разложение регулярного представления (в L^2 на группе по инвариантной мере) на неприводимые (с непрерывным спектром). Оказалось, что в этом разложении участвуют только некоторые унитарные представления, которые были названы представлениями главной серии (остальные представления составляют дополнительную серию). Замечательно, что мера Планшереля, участвующая в выражении нормы функции на группе через норму её проекций на неприводимые компоненты, была вычислена явно. Однако эта замечательная формула, напоминающая классическую формулу Вейля для конечномерных представлений, была результатом почти 10 страниц сплошных вычислений без видимых попыток выявить концептуальную структуру. Позднее это отмечал Маутнер, реферируя более концептуальное доказательство Хариш-Чандры. Это вписывалось в правила Гельфанда, который на первых порах больше заботился о ясности и красоте окончательного результата, чем об упрощении его доказательства. Однако для И. М. типично, что затем он годами напряжённо пытался осознать ситуацию.

Уже к моменту выхода этой статьи появились заметки, анонсирующие обобщения на случай группы $\mathrm{SL}(n;\mathbb{C})$, а в 1950 г. уже появилась огромная книга Гельфанда и Наймарка, посвящённая унитарным представлениям классических групп (Гельфанд любил называть её синей книгой по цвету обложки, а статью о случае $n=2$ — красной). Эта книга — результат фантастического по объёму труда, который представляется мне подвигом. Ясно виден стиль: получение явных формул путём напряжённых аналитических атак, невзирая на любые трудности. Особенно выразительно доказательство аналога формулы Планшереля, являющейся высшей точкой теории: авторы не смогли обобщить уже достаточно сложное доказательство из статьи про группу Лоренца, а приведённое в книге доказательство исключительно трудно и содержит много замечательных находок. Гельфанд особенно ценил вычисления в некотором обобщении эллиптических координат.

Около 1950 г. в математической жизни Гельфанда происходят существенные перемены. Прежде всего, заканчивается его необычайно плодотворное сотрудничество с Наймарком. Кроме того, решительно меняется организация его работы. Если прежде он в каждый момент концентрировался на каком-то одном направлении (банаховы пространства, банаховы алгебры, представления групп), то теперь он одновременно работает с разными соавторами над часто далеко отстоящими проблемами. Он не оставляет и теории представлений, и на многие годы его основным сотрудником становится М. И. Граев. К тому времени Хариш-Чандра дал концептуальное доказательство формулы Планшереля для всех комплексных полупростых групп Ли, а также для $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$. Гельфанда что-то по-прежнему не устраивало, и он время от времени возвращался к формуле Планшереля. В 1953 г. они с Граевым предложили исключительно изящный путь через применение результата М. Рисса о регуляризации степени квадратичной формы.

Гельфанд продолжал возвращаться к доказательству для группы Лоренца, которое в своё время не удалось обобщить и в котором, он чувствовал, что-то важное осталось непонятым. В 1958 г. он неожиданно увидел в этом доказательстве то, что оставалось скрытым почти 10 лет. Он заметил, что бóльшая часть доказательства была посвящена решению следующей элементарно звучащей задачи геометрического анализа: рассматривается функция $f(\alpha,\beta,\delta)$ от трёх комплексных переменных и интегрируется (в вещественном смысле) по всем комплексным прямым, пересекающим гиперболу $\alpha=\lambda$, $\delta=\lambda^{-1}$, $\beta=0$, $\lambda\in\mathbb{C}$. Требуется восстановить функцию f по этим интегралам. Получается очень простая формула обращения, напоминающая формулу обращения Радона, а для обращения обобщённого преобразования Фурье (формулы Планшереля) остаётся лишь обратить обычное преобразование Меллина. Авторы тогда не знали этой геометрической интерпретации, но, глядя на статью, не перестаёшь удивляться, как точно они следовали ей в вычислениях (соответствующий текст об этой задаче интегральной геометрии в томе 5 «Обобщённых функций» отличается от текста 1948 г. только добавлением некоторых слов без каких бы то ни было изменений формул).

Какое же отношение имеют эти прямые к группе Лоренца $\mathrm{SL}(2;\mathbb{C})$? Рассмотрим в ней орициклы — двусторонние сдвиги унипотентной подгруппы матриц вида $\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Они оказываются в точности 3-параметрическим семейством (над $\mathbb{C}$) всех (комплексных) прямых на группе, рассматриваемой как гиперболоид $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ в $\mathbb{C}^4$. Если спроектировать гиперболоид на плоскость координат (α, β, δ), то почти все орициклы (за исключением тех, что проектируются в точки) превратятся в прямые, пересекающие гиперболу. После этой интерпретации для Гельфанда и Граева уже было естественно определить орисферы и орисферическое преобразование в общем случае.

Однако в этом месте заканчивается романтическая сторона истории и начинаются прозаические проблемы. Не вызывает сомнений красота орисферического преобразования и его право на жизнь, но возникает законный вопрос: что оно даёт для теории представлений? С самого начала была идея, что должны быть прямые методы обращения некоторых обобщённых преобразований Радона, включая орисферические преобразования, и это должен быть наиболее естественный путь получения формулы Планшереля. Однако в 1959 году такого пути найти не удалось, и в основополагающей статье ситуация прямо противоположная: формула обращения орисферического преобразования для комплексных полупростых групп Ли и некоторых их однородных пространств была выведена из уже известной формулы Планшереля. Получилась замечательная формула, напоминающая по структуре формулу обращения Радона в нечетномерных пространствах и при этом показывающая, какие модификации должны произойти для пространств ранга, большего единицы: надо было усреднить по орисферам, проходящим через точку, результат применения некоторого явного дифференциального оператора (порядка, равного рангу) вдоль параллельных орисфер. Предстояло развить прямые методы интегральной геометрии и понять, какие преимущества имеет этот подход к гармоническому анализу. Это удалось частично лишь через 10 лет.

Всё же некоторые важные поддерживающие наблюдения накапливались, хотя и медленно. В самом начале Гельфанд заметил, что симметрическое (риманово) пространство для группы $SL(2;\mathbb{C})$ — это трёхмерное гиперболическое пространство с орисферами в классическом смысле. Оказалось, что формула обращения для этого орисферического преобразования в подходящих обозначениях абсолютно совпадает с формулой обращения для преобразования Радона в трёхмерном евклидовом пространстве. В некотором смысле орисферический подход не зависит от кривизны! Важность этого наблюдения не вызывала сомнений, но странным образом долго не было попыток включить его в некоторый общий результат. Сегодня понятно, что если рассмотреть для римановых симметрических пространств неположительной кривизны их «плоские» двойники (устремив кривизну к нулю), то формулы обращения орисферических преобразований будут идентичными. Мне кажется, что это объясняет природу простых явных формул (удививших создателей теории) для представлений полупростых групп Ли: с точки зрения орисферического подхода задачи оказываются эквивалентны плоским. Имеется другое важное обстоятельство, которое, несомненно, ясно осознавалось, хотя я и не встречал его обсуждения. При стандартном подходе к формуле Планшереля регуляризуются интегралы по классам сопряжённых элементов для сингулярных классов так, чтобы получить «интеграл» по единичному классу. Орисферы являются в некотором смысле образующими классов сопряжённых элементов, и при переходе к ним сингулярные рассмотрения не требуются.

Интегральная геометрия прямых и кривых. Наибольший успех в последующий период был связан с обдумыванием интерпретации орициклов на группе Лоренца как прямых, пересекающих гиперболу. Всё началось с вопроса, который, по классификации Гельфанда, относился к категории вопросов, «которые каждому дураку приходят в голову» (и к которым он призывал относиться очень серьёзно, да и ответить на них бывает непросто). Что произойдёт, если заменить гиперболу другой кривой? А. А. Кириллов показал, что при любой такой замене формула обращения остаётся неизменной. Это означало нечто очень важное: с заменой гиперболы исчезала группа и становилось ясно, что существенная часть теории представлений группы Лоренца связана не с групповой структурой, а с какими-то более общими геометрическими структурами.

Это была первая попытка Гельфанда с сотрудниками вложить теорию представлений в более широкую область геометрического анализа. Следующий шаг был опять естественен — понять природу условия с пересечением кривой. Семейство всех прямых в $\mathbb{C}^3$ зависит от четырёх (комплексных) параметров. Для интегральной геометрии естественно рассматривать 3-параметрические семейства (комплексы прямых по классической терминологии), поскольку тогда интегрирование преобразует функцию от трёх переменных в функцию от трёх переменных. Для каких комплексов прямых имеется формула обращения радоновского типа, аналогичная формуле, обнаруженной для комплексов прямых, пересекающих фиксированную кривую? И. М. Гельфанд и М. И. Граев показывают, что это возможно также для комплексов прямых, касающихся фиксированной поверхности, и ни для каких других. Они назвали такие комплексы допустимыми.

Стоит сказать пару слов о доказательстве этого удивительного результата. Ф. Джон обнаружил, что в вещественном случае образ оператора интегрирования по прямым в трёхмерном пространстве описывается ультрагиперболическим дифференциальным уравнением. В комплексном случае надо рассматривать его голоморфную и антиголоморфную версии. Оказывается, что существование нужной формулы обращения эквивалентно разрешимости задачи Гурса и потому совпадает с условием характеристичности для этого оператора, а это нелинейное уравнение может быть проинтегрировано методом Гамильтона — Якоби. Рассмотрение бихарактеристик и их склеивания даёт описание допустимых комплексов прямых. Эти комплексы уже появлялись в классической дифференциальной геометрии. Они в естественном смысле максимально вырождены: прямые комплекса, пересекающие одну фиксированную прямую комплекса, инфинитезимально лежат в одной плоскости.

Этот результат обобщается на комплексы прямых общего положения в пространствах любой размерности. Далее естественно рассмотреть возможность заменить прямые кривыми. Окончательный результат в этом направлении был получен И. Н. Бернштейном и мною (после того как И. М. Гельфандом, З. Я. Шапиро и мною была найдена универсальная структура формул обращения для комплексов кривых). Допустимые комплексы кривых оказались в точности инфинитезимально полными семействами рациональных кривых (инфинитезимально они являются пространством всех сечений некоторого векторного расслоения над проективной прямой). Здесь наиболее существенна необходимость для кривых быть одновременно рациональными. Это весьма эффективное условие, позволяющее строить многочисленные явные примеры семейств кривых с формулами обращения радоновского типа, например, из кривых второго порядка. В этих построениях естественно отказаться от условия, чтобы семейство было комплексом (число параметров семейства равно размерности многообразия). В этом случае имеется возможность рассмотреть некоторое обобщение задачи интегральной геометрии, но более поучительны возможности применений за пределами теории представлений. Имеется, в частности, связь с теорией твисторов Пенроуза: четырехпараметрические допустимые семейства кривых отвечают в точности конформным правоплоским 4-метрикам (автодуальная часть кривизны Вейля равна нулю). Это дало возможность И. Н. Бернштейну и мне развить метод построения явных решений автодуального уравнения Эйнштейна. Мне кажется, что в случае кривых интегральную геометрию удалось развить достаточно полно. Она выглядит как некоторый раздел нелинейного анализа с фокусом на явно интегрируемых задачах и связана с методом обратной задачи для случая одного спектрального параметра.

Комплексы плоскостей. Ситуация с подмногообразиями размерности, большей 1, несопоставимо более сложна; возможно, там нет шансов продвинуться столь же далеко. По-видимому, это аналогично неинтегрируемости в обратных задачах с несколькими спектральными параметрами. Однако некоторые существенные вещи удалось сделать. Напомним, что, начиная с первой работы по интегральной геометрии, стояла задача найти доказательство формулы Планшереля через обращение орисферического преобразования. Прошло 10 лет, прежде чем Гельфанд, Граев и Шапиро сделали это для группы $\mathrm{SL}(n;\mathbb{C})$. Мы уже обсуждали, что при $n=2$ орисферы можно рассматривать как прямые. И для произвольного n орисферы для этой группы можно рассматривать как плоскости размерности $k=n(n-1)/2$ в $\mathbb{C}^N$, $N=n^2-1$. Размерность этого семейства совпадает с N, так что мы имеем комплекс k-плоскостей. Решающая идея состоит в том, чтобы исследовать задачу восстановления функции через её интегралы по плоскостям из произвольного комплекса, не ограничиваясь комплексом орисфер. Заметим, что задача восстановления функции через интегралы по всем плоскостям чрезвычайно переопределена и переход к комплексам — естественный путь сделать задачу определённой. Оказывается, что для восстановления в точке всегда можно написать формулу, напоминающую формулу обращения Радона, с интегрированием некоторого явного дифференциального оператора (порядка $2k$) по плоскостям комплекса, проходящим через эту точку. Этот оператор определён на множестве всех k-плоскостей, и только при очень сильных условиях мы можем вычислить его лишь через ограничение на плоскости комплекса. Назовём такие комплексы допустимыми. Опять возникает некоторое условие характеристичности. Мы можем описать ситуацию несколько иначе. Образ оператора интегрирования по k-плоскостям описывается некоторой системой дифференциальных уравнений второго порядка, обобщающей уравнение Джона. Можно сказать, что в некотором смысле допустимые комплексы являются максимально вырожденными.

Нелинейная задача описания допустимых комплексов вряд ли является интегрируемой для $k > 1$, однако И. М. Гельфанд и М. И. Граев проверили непосредственно, что комплекс орисфер на $\mathrm{SL}(n;\mathbb{C})$ является допустимым; в результате мы получаем обращение орисферического преобразования, а вслед за ним формулу Планшереля. Я уверен, что есть нечто очень значительное в этом факте вырожденности многообразия орисфер. Я думаю, что в нём — геометрическая основа теории представлений полупростых групп Ли. Разумеется, этот результат существенно использует возможность рассматривать орисферы на $\mathrm{SL}(n;\mathbb{C})$ как плоскости. Для других полупростых групп Ли это невозможно, но я показал, что описанную ситуацию можно обобщить на них, рассматривая допустимые комплексы произвольных подмногообразий.

Нелокальные задачи и интегральная геометрия для дискретных серий. В случае комплексных групп структура формул обращения с усреднением дифференциального оператора означает, в частности, что они локальны: для восстановления функции в точке достаточно знать интегралы по орисферам, близким к точке. В случае преобразования Радона так обстоит дело только в нечетномерных пространствах, но в четномерных пространствах формула обращения нелокальна: в ней усредняется псевдодифференциальный оператор. Если переходить от комплексных групп к вещественным и их однородным пространствам, то первая новая трудность связана с неминуемым появлением нелокальных формул. Естественно начать с римановых симметрических пространств некомпактного типа $X = G/K$, где G — вещественная полупростая группа Ли, K — её максимальная компактная подгруппа. Тогда орисферическое преобразование всегда инъективно, а формула обращения локальна тогда и только тогда, когда кратности всех корней чётны. В этом случае формула обращения может быть получена способом, описанным выше, для комплексных групп, но общий случай требует новых идей. После того как мы с Карпелевичем вычислили плотность меры Планшереля через формулу произведения для c-функции Хариш-Чандры на этих пространствах, мы реализовали в этом случае аналог подхода Гельфанда — Граева к комплексным группам в их первой статье: мы вычислили ядро обратного орисферического преобразования как обратное преобразование Меллина плотности Планшереля. Мы провели это вычисление для классических групп, а Берендс — в общем случае. Следующий шаг должен был состоять в прямом выводе формулы обращения средствами геометрического анализа (как в случае чётных кратностей), но этого пока сделать не удалось. Мы с И. М. Гельфандом пытались двигаться в этом направлении, развивая некоторый симметрический аналог дифференциальных форм на вещественных грассманианах, который имеет несомненный независимый интерес, однако существенного прогресса в исходной проблеме мы не достигли. Мне кажется, что многие моменты сегодня стали яснее и эта задача выглядит реалистичной.

Наконец, мы можем перейти к обсуждению главного препятствия к построению теории представлений на базе орисферического преобразования, которое было ясно с самого начала. Для вещественных полупростых групп Ли орисферическое преобразование имеет ядро, объединяющее все серии представлений, кроме максимально непрерывной. Это актуально уже для группы $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$: если разложить её регулярное представление в сумму подпространств L_c, L_d, отвечающих непрерывной и дискретной сериям соответственно, то ядро орисферического преобразования совпадёт с L_d, а образ изоморфен L_c, и не видно, как на этом пути получить формулу Планшереля. Это легко интерпретировать как драматическое ограничение возможностей интегральной геометрии в случае вещественных групп, где дискретные серии играют центральную роль. По-видимому, по этой причине идея И. М. Гельфанда применять интегральную геометрию к теории представлений не вызвала энтузиазма у большинства специалистов.

Я могу засвидетельствовать, что Гельфанд никогда не верил, что область применения орисфер ограничивается непрерывными сериями. По его мнению, надо было понять, что отвечает орисферам в случае дискретных серий, и это возможно. Это отвечало его вере в эстетическую гармонию математики. В его первом докладе, который мне довелось слышать (в 1955 г.), он сказал о факторах фон Неймана типа 2, у которых не было известно применений: «Такая красота не может пропадать!» Только в одном случае — для мнимого трёхмерного гиперболического пространства — Гельфанд и Граев смогли найти подходящее расширение: дискретная серия там была связана с некоторыми вырожденными орисферами. Однако это было связано с некоторыми очень специальными обстоятельствами и не имело шансов на непосредственное обобщение.

Начинать нужно было со случая $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$, и в 1968 году мы с И. М. Гельфандом предприняли попытку понять его. Наша философия заключалась в том, что формулу Планшереля надо получать в два этапа: сначала нужно найти проекции на подпространства, отвечающие сериям представлений, а затем уже разложить по неприводимым представлениям внутри одной серии, что является сравнительно простой задачей коммутативного гармонического анализа. Серии представлений отвечают классам эквивалентности картановских подгрупп. Разложение каждого из подпространств на неприводимые сводится к коммутативному преобразованию Фурье (непрерывному или дискретному) относительно соответствующей картановской подгруппы. Так что основным является первый этап. Две основные связанные задачи — это нахождение проекций на серии и внутренняя аналитическая характеризация этих подпространств. Мы решили эти задачи для $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$. Подпространства, отвечающие голоморфной и антиголоморфной дискретным сериям, могут быть охарактеризованы как граничные значения голоморфных функций в некоторых трубчатых областях в комплексной группе $\mathrm{SL}(2;\mathbb{C})$. Проекторы могут быть интерпретированы как некоторые аналоги интегральной формулы Коши. Помню, как рад был И. М. Гельфанд этому результату: он часто повторял, что новые существенные вещи в представлениях должны быть нетривиальны для $\mathrm{SL}(2)$. Мы предположили, что и в общем случае серии связаны с некоторыми трубчатыми областями, которые могут не быть многообразиями Штейна, и тогда нужно рассматривать в них когомологии Коши — Римана. Позже это стали называть программой Гельфанда — Гиндикина. В ней был получен существенный прогресс, но только для голоморфных дискретных серий.

Можно было ожидать, что проекции на серии должны быть както связаны с интегральной геометрией, но тогда подходящее обобщение орисфер найти не удалось. Много позже я обнаружил некоторую естественную конструкцию. На $G = \mathrm{SL}(2;\mathbb{C})$ имеется два класса орисфер, каждый из которых даёт возможность построить орисферическое преобразование. Выше мы обсуждали одномерные орициклы. Однако можно также рассмотреть двумерные орисферы — орбиты максимальных унипотентных групп в $SL(2;\mathbb{C}) \times SL(2;\mathbb{C})$ при двустороннем действии. Их геометрическая характеризация — сечения группы, рассматриваемой как гиперболоид, изотропными плоскостями. Орициклы являются образующими двумерных орисфер, и по этой причине обе версии орисферического преобразования эквивалентны. В вещественной ситуации для $SL(2;\mathbb{R})$ они оба имеют ядро. Идея заключается в том, что, раз не хватает вещественных орисфер, надо рассмотреть некоторые комплексные. Рассмотрим такие комплексные орисферы, которые не пересекают вещественной подгруппы $SL(2;\mathbb{R})$. Имеется три типа таких орисфер. Вместо интегрирования по вещественным орисферам мы рассматриваем свёртку (на вещественной группе) с ядрами Коши с особенностями на комплексных орисферах без вещественных точек. В результате определяется орисферическое преобразование из трёх компонент. Оно уже не имеет ядра, а образы разных компонент разлагаются по представлениям разных серией. Обращение орисферического представления даёт проекторы на серии, а затем и формулу Планшереля. Одновременно функции из непрерывной серии продолжаются как одномерные когомологии в невыпуклую трубчатую область в соответствии с нашей гипотезой. Я думаю, что возможность продолжать в многомерном анализе вещественные функции в комплексную область не только как голоморфные функции, но и как старшие когомологии является важным недооценённым феноменом. Надеюсь, что правильное развитие концепции комплексных орисфер для вещественных полупростых групп Ли позволит построить интегрально-геометрический эквивалент теории представлений. Интересно, что это можно сделать даже для компактных групп Ли, для которых вещественных орисфер нет вообще.

И. М. Гельфанд (в соавторстве с М. И. Граевым и мной) работал над многими другими аспектами интегральной геометрии. По результатам этой работы опубликована целая книга (*Гельфанд И. М., Гиндикин С. Г., Граев М. И.* Избранные задачи интегральной геометрии. М.: Добросвет, 2000). Мы не обсуждаем этих результатов здесь, поскольку мне хотелось в этом изложении сконцентрироваться на том направлении в интегральной геометрии, которое мне представляется главным в проекте И. М. Гельфанда. Интересно, что И. М. Гельфанд интересовался преобразованием Радона задолго до того, как обнаружилась его связь с теорией представлений;

он любил предлагать задачи студентам, хотя сам и не работал в этом направлении. Это было как бы предчувствие будущих связей, которое встречается у выдающихся математиков и которое было типично для него. Интегральная геометрия не относится к числу его наиболее успешных проектов, вызвавших признание и многочисленных последователей. Однако в ней очень выпукло проявился его неповторимый подход к математике. Как и любой математик, которому посчастливилось работать с И. М. Гельфандом, я привык доверять его фантастической интуиции и уверен, что эта история ещё не кончилась и, быть может, мне ещё доведётся увидеть реализацию его смелого проекта.