От издательства

Вы держите в руках переиздание русского перевода книги, по которой выучилось несколько поколений математиков — и зарубежных, и отечественных.

За время, прошедшее с выхода русского перевода этой книги, — почти полвека — появился ряд новых учебников и монографий по коммутативной алгебре. В подробных учебниках Айзенбада [1*] и Мацумуры [5*, 6*] много места уделено не рассматривающимся в данной книге гомологическим методам. В книге Рида [7*] и в первой главе книги Ю. И. Манина [4*], напротив, введение в коммутативную алгебру является еще более кратким, чем в настоящей книге, но больше внимания уделено связям с алгебраической геометрией. Наконец, много интересного содержится в еще не переведенных на русский выпусках трактата Бурбаки [2*, 3*]. И при всем этом небольшая книжка Атьи и Макдональда остается идеальным введением в предмет.

В настоящем издании исправлены некоторые мелкие неточности.

Май 2021 г.

Литература

1*. *Айзенбад Д.* Коммутативная алгебра с прицелом на алгебраическую геометрию. М.: МЦНМО, 2017.

2*. *Bourbaki N.* Algèbre commutative. Ch. 8. Dimension. Ch. 9. Anneaux locaux noethériens complets. Paris: Masson, 1983.

3*. *Bourbaki N.* Algèbre commutative. Chapitre 10. Profondeur, régularité, dualité. Paris: Masson, 1998.

4*. *Манин Ю. И.* Введение в теорию схем и квантовые группы. 2-е изд., расширенное. М.: МЦНМО, 2020.

5*. *Matsumura H.* Commutative algebra. 2nd ed. Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc., Reading, Mass., 1980.

6*. *Matsumura H.* Commutative ring theory / Translated from the Japanese by M. Reid. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1989.

7*. *Reid M.* Undergraduate commutative algebra. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

Введение

Коммутативная алгебра в основном изучает коммутативные кольца. Несколько упрощая, можно сказать, что она развилась из двух источников: алгебраической геометрии и теории алгебраических чисел. Типичное алгебро-геометрическое кольцо — это $k[x_1, \ldots, x_n]$ — кольцо многочленов от нескольких переменных над некоторым полем k. Типичное числовое кольцо — это $\mathbb{Z}$ (рациональные целые числа). При этом алгебро-геометрическая точка зрения приводит к более далеко идущим результатам и в современной трактовке Гротендика включает в себя также большую часть алгебраической теории чисел. Коммутативная алгебра превратилась в одно из основных орудий новой алгебраической геометрии. Она служит локальным аппаратом для этой теории, подобно тому как дифференциальное исчисление дает локальную технику дифференциальной геометрии.

Эта книга возникла из лекций, читанных третьему курсу студентов Оксфордского университета. Ее цель скромна — быстро ввести читателя в суть дела. Она предназначена для студентов, проработавших элементарный вводный курс общей алгебры, и не может служить заменой более обстоятельных изложений коммутативной алгебры, таких как книги Зарисского и Самюэля [4] или Бурбаки [1]. Мы сосредоточили внимание на некоторых центральных темах, не затронув такие обширные разделы, как теория полей.

По содержанию этот курс перекрывает книгу Норткотта [3]; стиль нашего изложения существенно отличается тем, что в соответствии с современными тенденциями больше внимания уделено модулям и локализации.

Центральное место в коммутативной алгебре занимает понятие простого идеала. Оно служит одновременным обобщением простых чисел в арифметике и точек в алгебраической геометрии. Принятый в геометрии способ рассматривать ситуацию в окрестности некоторой точки также имеет алгебраический аналог: это важный процесс *локализации* кольца относительно простого идеала. Не удивительно поэтому, что утверждения о локализации полезно интерпретировать геометрически. Это последовательно делается в теории *схем* Гротендика. Мы включили схемные варианты многих результатов в упражнения и замечания, отчасти желая ввести читателя в теорию Гротендика [2], отчасти же для развития геометрической интуиции.

Поскольку эта книга возникла из записей лекций, ее стиль довольно лаконичен, общие разговоры почти отсутствуют и многие доказательства написаны сжато. Мы противились искушению увеличить объем в надежде, что экономность изложения позволит яснее показать математическую структуру теории, принявшей к нашему времени изящный и привлекательный облик. Общий принцип состоял в том, чтобы представлять доказательства основных теорем в виде серии простых шагов, опуская стандартные проверки.

Любой автор, взявшийся за изложение коммутативной алгебры, стоит перед необходимостью принять решение по поводу гомологической алгебры, роль которой в современных достижениях столь велика. Изложить ее как следует в маленькой книжке невозможно; полностью игнорировать ее, однако, едва ли разумно. Компромиссное решение, принятое нами, состоит в том, чтобы пользоваться элементарными гомологическими методами (точные последовательности, диаграммы и т. п.), но не прибегать ни к каким результатам, требующим глубокого изучения гомологий. Мы надеемся таким образом подготовить почву для систематического изучения гомологической алгебры, которое должен предпринять любой читатель, желающий сколько-нибудь далеко продвинуться в алгебраической геометрии.

Мы собрали довольно много упражнений к каждой главе; среди них есть легкие и трудные. К последним обычно даны указания, а иногда и полные решения. Мы признательны Р. Шарпу, решившему все задачи и избавившему нас от ряда ошибок.

Мы не делали попыток указать вклад многих математиков, усилия которых привели к оформлению изложенной здесь теории. Однако нам хотелось бы поблагодарить Ж.-П. Серра и Дж. Тэйта, научивших нас коммутативной алгебре и оказавших решающее влияние на выбор материала и способ его представления.

Литература

1. *Бурбаки Н.* Коммутативная алгебра. М.: Мир, 1971.
2. *Grothendieck A., Dieudonné J.* Éléments de Géométrie Algébrique. Publ. Math. IHES; № 4, 8, 11. Paris, 1960, 1961.
3. *Northcott D. G.* Ideal Theory. Cambridge University Press, 1953.
4. *Зарисский О., Самюэль П.* Коммутативная алгебра. М.: ИЛ, 1963.